Math. A.
324
m/3,1

Kleyers Encyklopädie

Lehrbuch des Projektionszeichnens III.1.

Von J. Vonderlinn

Math. A. 324 m (3,1

Kleyers

Encyklopädie

der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Das Projektionszeichnen.

C

Lehrbuch

des

Projektionszeichnens.

Dritter Teil. Erste Hälfte.

Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.

Mit 195 Erklärungen und 159 in den Text gedruckten Figuren.

Für den Schulunterricht und das Selbststudium

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Professor J. Vonderlinn,

dipl. und staatlich geprüfter Ingenieur.

[1890]

Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Gso. 32224

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

44/ 3308

Vorwort.

Das vorliegende Bändchen, als erste Hälfte des III. Teiles meines Lehrbuches über Projektionszeichnen, enthält die Elemente der schiefen Parallelprojektion sowie der Centralprojektion einschliesslich der für das Studium der darstellenden Geometrie wichtigsten Lehren aus dem Gebiete der projektiven Geometrie. Soll heutzutage ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie seinem Zwecke entsprechen, so ist es wohl unumgänglich notwendig, die Lehren der projektiven Geometrie in den Kreis der Betrachtungen einzubeziehen.

Ich habe die Lehren der genannten Disciplin nur insoweit in mein Buch aufgenommen, als zum Verständnis der projektiven Beziehungen der verschiedenen Grundgebilde der Geometrie absolut erforderlich ist und in der vorliegenden ersten Hälfte des III. Teiles nur die Gebilde der ersten Stufe ausführlicher behandelt.

Die zweite Hälfte soll die Gebilde der zweiten und dritten Stufe und damit in Verbindung die Lehre von den Kegelschnitten, die Reliefperspektive, endlich aber auch noch rechtwinklige, schiefwinklige und centrale Axonometrie zur Darstellung bringen.

Leider wurde das Erscheinen dieses Teiles etwas verzögert infolge meiner Berufung an die Kgl. Oberreal- und Baugewerkschule Breslau und der dadurch bedingten grösseren Beanspruchung im dienstlichen Berufe. Doch

hoffe ich zuversichtlich, die zweite Hälfte des III. Teiles bis zum Herbste dieses Jahres der Oeffentlichkeit übergeben zu können.

Der geehrten Verlagshandlung gebührt für die sorgfältige und schöne, mit grossen Kosten verbundene Ausstattung des Buches alle Anerkennung, welcher ich hiermit unter verbindlichstem Danke Ausdruck gebe.

Breslau, im März 1890.

J. Vonderlinn.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

1) Ueber die schiefwinklige Parallelprojektion im allgemeinen 1

2) Ueber die schiefe Projektion mit Benützung einer Abstandsebene 5

A) Ueber die Darstellung eines Punktes 5
B) Ueber die Darstellung einer Geraden 5
C) Ueber die Darstellung einer Ebene 8
E) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander 9

a) Lagen von Punkt und Gerade 9
b) Lagen zweier Geraden 9
c) Lagen von Gerade und Ebene im allgemeinen 12
d) Lagen von Punkt und Ebene 14
e) Lagen zweier Ebenen 14
f) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene 15
g) Winkel einer Geraden mit einer Ebene 16
h) Winkel zweier Ebenen 16

3) Ueber die schiefe Projektion mit Zugrundelegung der Pr. Ebn. E_1, E_2 und E_3 20

A) Ueber die Darstellung eines Punktes 20
B) Ueber die Darstellung einer Geraden 27
C) Ueber die Darstellung einer Ebene 33
D) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander 35

a) Lagen von Punkt und Gerade 35
b) Lagen zweier Geraden 35
c) Lagen einer Geraden und einer Ebene 36
d) Lagen eines Punktes zu einer Ebene 39
e) Lagen zweier Ebenen 40
f) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene 46
g) Winkel einer Geraden und einer Ebene 48
h) Winkel zweier Ebenen 48

4) Ueber die Centralprojektion 54

A) Ueber die Centralprojektion im allgemeinen 54
B) Ueber die Darstellung eines Punktes 56
C) Ueber die Darstellung einer Geraden 59

Seite

D) Ueber die Darstellung einer Ebene 67

*E) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander 68

a) Lagen von Punkt und Gerade 68
b) Lagen zweier Geraden 69
c) Lagen einer Geraden und einer Ebene 69
d) Lagen eines Punktes zu einer Ebene 70
**e) Lagen zweier Ebenen 71
f) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene 79
g) Winkel einer Geraden mit einer Ebene 86
h) Winkel zweier Ebenen 86

F) Zusammenhang zwischen den Punkten einer Raumgrösse und deren centralen Projektionen 99

G) Ueber die harmonische Teilung. Harmonische Gebilde . . . 116

H) Konstruktion harmonischer Gebilde 118

I) Ueber die Konstruktion der projektiven Gebilde der ersten Stufe 122

K) Besondere Fälle der Projektivität der Gebilde der ersten Stufe 124

5) Andeutungen zu den Lösungen der ungelösten Aufgaben 161

Druckfehler:

* Auf Seite 68, Zeile 6 von unten lies E) statt D).

** Auf Seite 71, Zeile 11 von unten lies e) statt d).

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite	10	Zeile	22	von	oben	lies	„Dreiecksseiten“	statt	Dreiecksebene.
„	20	„	37	„	„	„	unter a	„	unter b.
„	43	„	21	„	„	„	so hat man nur	„	so hat nur.
„	46	„	37	„	„	„	durch	„	das
„	53	„	32	„	„	„	Strecke	„	Strecken
„	112	„	18	„	„	„	Ebenen	„	Edene
„	134	„	10	„	„	„	R, R'	„	R, Q'
„	144	„	34	„	„	„	$= tg\, GM^2$	„	$- tg\ GM^2$

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Das Projektionszeichnen.

III. Teil.

1) Ueber die schiefwinklige Parallelprojektion im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter der schiefwinkligen Parallelprojektion einer Raumgrösse auf eine gegebene **Pr. Eb.**?

Erkl. 1. Statt des Ausdrucks „schiefwinklige Parallelprojektion“ soll in der Folge stets die kürzere Bezeichnung „schiefe Projektion“ gewählt werden.

Erkl. 2. Die Gerade A, zu welcher die Parallelen durch die einzelnen Punkte zu ziehen sind, heisst die „Projektionsrichtung“, die Parallelen selbst sollen „Projektionsstrahlen“ oder kurzweg „Projizierende“ genannt werden.

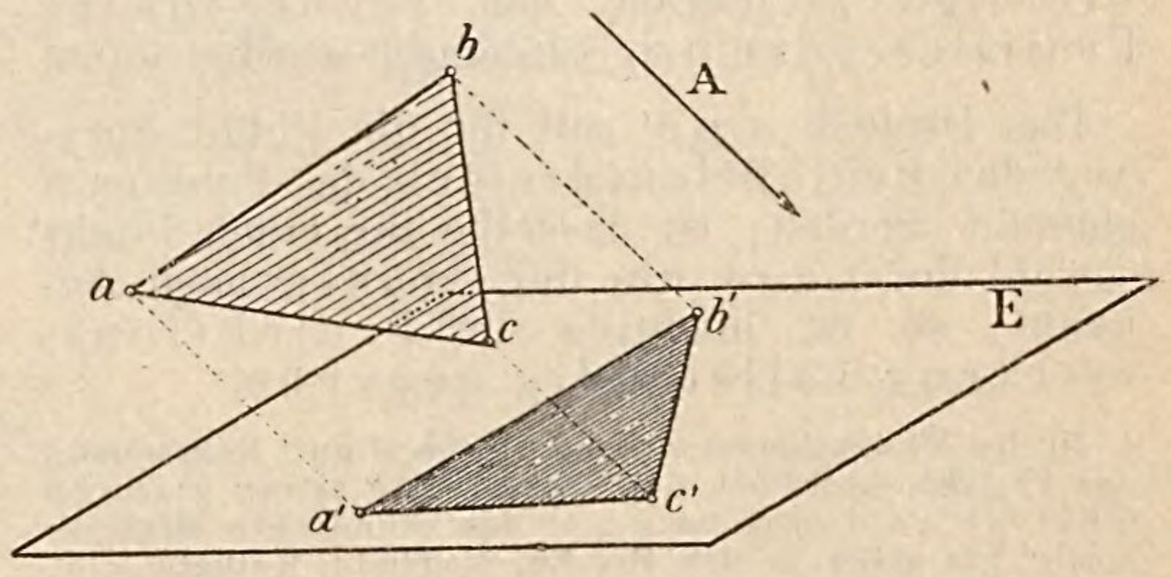
Erkl. 3. Durch die schiefe Projektion einer Raumgrösse wird die **Pr. Eb.** in zwei Teile geteilt, deren einer die schiefen Projektionen sämtlicher der Raumgrösse angehörigen Punkte enthält, während die durch die übrigen Punkte der **Pr. Eb.** gezogenen Projizierenden die Raumgrösse nicht treffen. Die Grenzlinie zwischen beiden Teilen, z. B. in Figur 1 das Dreieck $a'b'c'$, heisst der scheinbare Umriss der dargestellten Raumgrösse.

Ist die Raumgrösse ein Polyeder, so besteht der scheinbare Umriss aus geraden Linien, ist die Raumgrösse dagegen teils von ebenen teils von krummen Flächen begrenzt, so ist auch der scheinbare Umriss eine von geraden und krummen Linien eingeschlossene Figur. Siehe auch Erkl. 18 bis 20, II. Teil.

Antwort. Denkt man sich durch die sämtlichen Punkte einer Raumgrösse gerade Linien, parallel zu einer willkürlich gewählten Richtung A gezogen und deren Durchschnittspunkte mit der **Pr. Eb.** aufgesucht, so bildet die Gesamtheit aller so erhaltenen Punkte die schiefwinklige Parallelprojektion der Raumgrösse.

Ist z. B., siehe Figur 1, ein Dreieck abc gegeben, so treffen die parallel zur Geraden A durch die Punkte a, b, c gezogenen Geraden die **Pr. Eb.** in den Punkten a', b', c' und die Verbindungslinien der letzteren Punkte begrenzen die schiefwinklige Parallelprojektion des Dreiecks abc auf die **Pr. Eb.** Siehe auch Frage und Antwort 4 bis 6, I. Teil.

Figur 1.



Frage 2. Wie bestimmt man die schiefe Projektion eines Punktes auf eine **Pr. Eb.**?

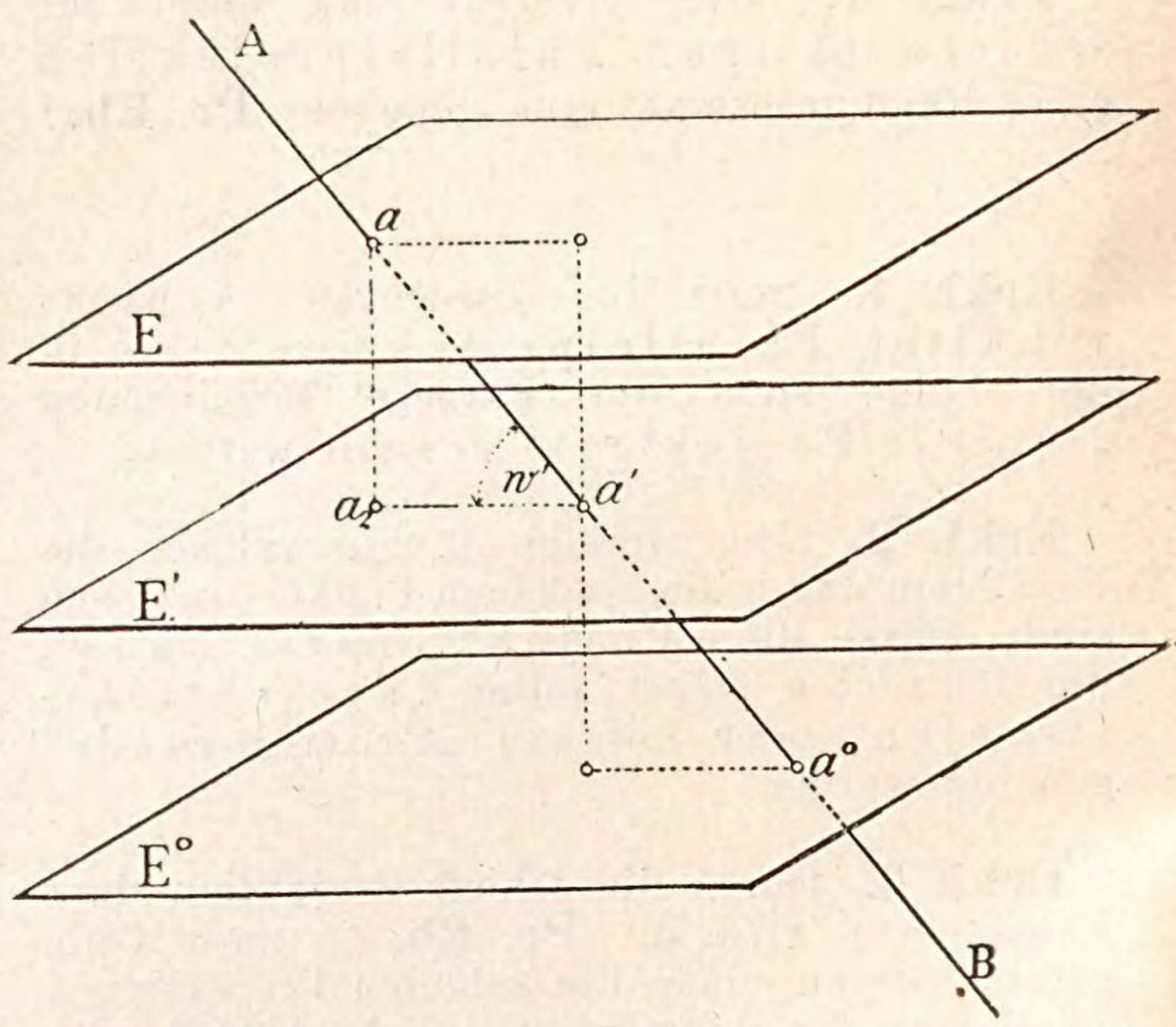
Erkl. 4. Da es nur einen Durchschnittspunkt der Projizierenden durch a mit der **Pr. Eb.** gibt, so ist klar, dass die schiefe Projektion eines Punktes vollständig bestimmt ist, sobald man den Punkt im Raume, sowie die Projektionsrichtung kennt.

Antwort. Man zieht durch den Punkt a eine Projizierende und ermittelt deren Durchschnitt a' mit der **Pr. Eb.** „Die schiefe Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.“

Frage 3. Wie bestimmt man umgekehrt bei gegebener schiefer Projektion und bekannter Projektionsrichtung die Lage eines Punktes im Raume?

Antwort. Ist a', siehe Figur 2, die gegebene schiefe Projektion eines Punktes a im Raume, so denke man sich durch a eine Projizierende AB gezogen, so ist dieselbe der geometrische Ort für den zu bestimmenden Punkt a. Jeder Punkt von AB kann der Punkt a sein. Will man somit die Lage des Punktes a im Raume feststellen, so muss man noch eine weitere Bedingung kennen und diese kann sein, dass entweder die Strecke $\overline{aa'}$ von gegebener Länge oder

Figur 2.



der Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** von gegebener Grösse sei. Im ersten Fall lässt sich die gegebene Länge $\overline{aa'}$ von a' aus nach zwei Seiten von AB, nämlich nach a oder a^0 abtragen, im zweiten Fall gibt es zwei Parallelebenen E und E^0 zur **Pr. Eb.** im gegebenen Abstande von letzterer, in denen der Punkt a sich befinden muss. In

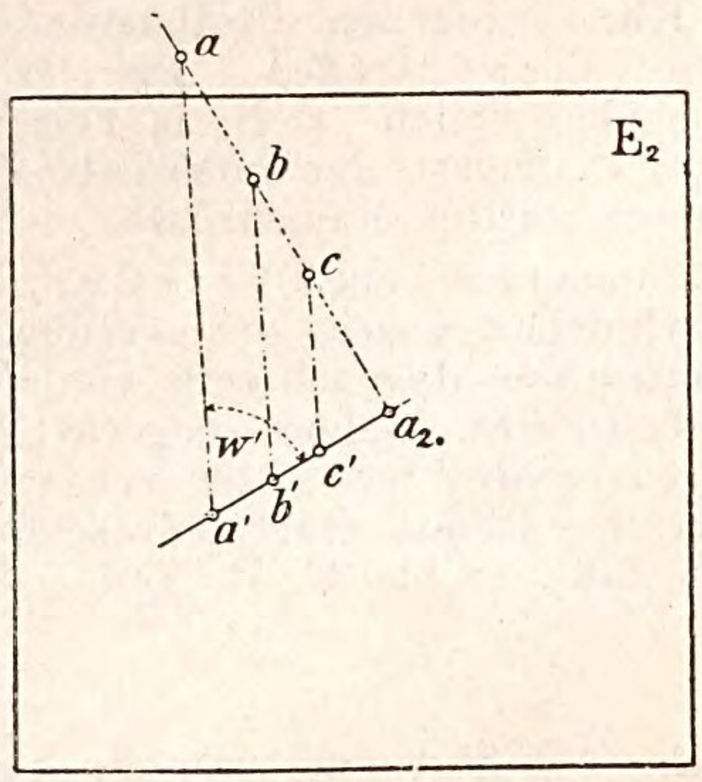
Erkl. 5. Aus dem in Antwort der Frage 3 Gesagten geht hervor, dass bei bekannter Projektionsrichtung die Lage eines Punktes im Raume nicht durch seine schiefe Projektion allein bestimmt ist, dass vielmehr noch eine weitere Bedingung über die Lage des Punktes bekannt sein muss.

Erkl. 6. Anstatt nun den Abstand des Punktes von der **Pr. Eb.** oder die Entfernung des Punktes von seiner schiefen Projektion zu geben, kann man sich die rechtwinklige Projektion a_2 des Punktes a hergestellt denken, siehe Figur 2. Kennt man nun die beiden Projektionen a_2 und a eines Punktes, sowie die Projektionsrichtung AB für die schiefe Projektion, so ist hiedurch die Lage des Punktes a im Raume vollständig festgestellt, denn die Projizierenden durch a' und durch a_2 schneiden sich nur in einem Punkte a im Raume.

Erkl. 7. Durch die drei Punkte a, a' und a_2 ist ein bei a_2 rechtwinkliges Dreieck festgelegt, in welchem bei a' der Winkel w' der Projektionsrichtung mit der **Pr. Eb.** enthalten ist; ausserdem bezeichnet die Kathete $\overline{a_2 a}$ den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** Man ersieht ferner, dass die Kathete $\overline{a_2 a'}$ sowohl als rechtwinklige Projektion der schief Projizierenden aa', wie auch als schiefwinklige Projektion der rechtwinklig Projizierenden aa_2 aufgefasst werden kann.

Das Dreieck aa_2a' soll für die Folge kurzweg das Projektionsdreieck des Punktes a genannt werden; ist dasselbe für einen Punkt sowohl der Lage wie der Grösse nach bekannt, so ist hiedurch die Projektionsrichtung vollständig gegeben.

Figur 3.

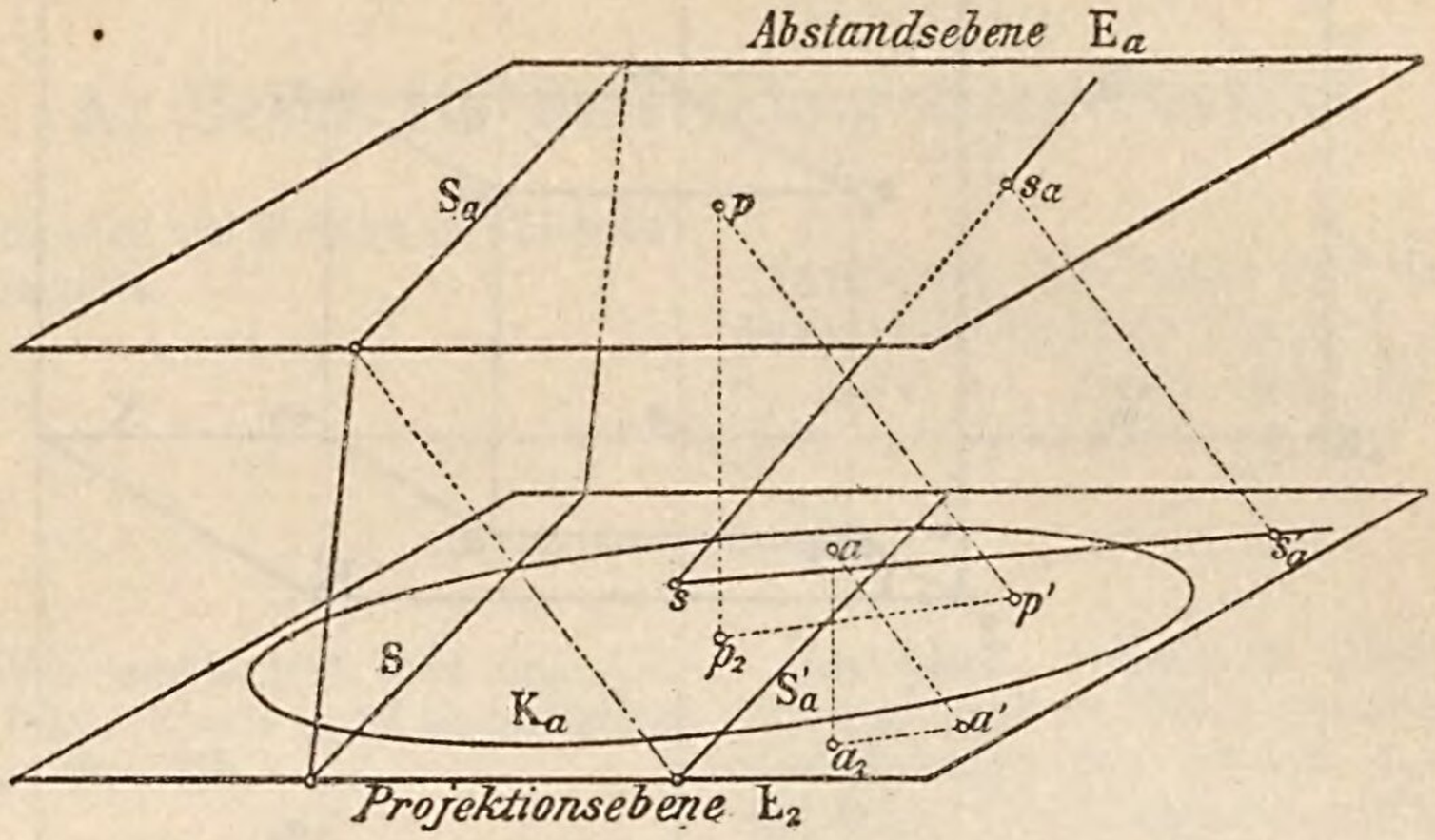


In der Projektionszeichnung, siehe Figur 3, erscheint das Projektionsdreieck des Punktes a in seiner wahren Gestalt als Umlegung aa_2a' des räumlichen Dreiecks aa_2a' um seine in der **Pr. Eb.** liegende Kathete a_2a'. Die schiefen Projektionen aller auf a_2a liegenden Punkte b, c etc. liegen auf a_2a', so dass die Dreiecke ba_2b', ca_2c' die Projektionsdreiecke dieser Punkte sind.

beiden Fällen sind somit zwei Lagen eines Punktes im Raume vorhanden, denen eine vorgegebene schiefe Projektion, sowie ein bestimmter Abstand von der **Pr. Eb.** entspricht.

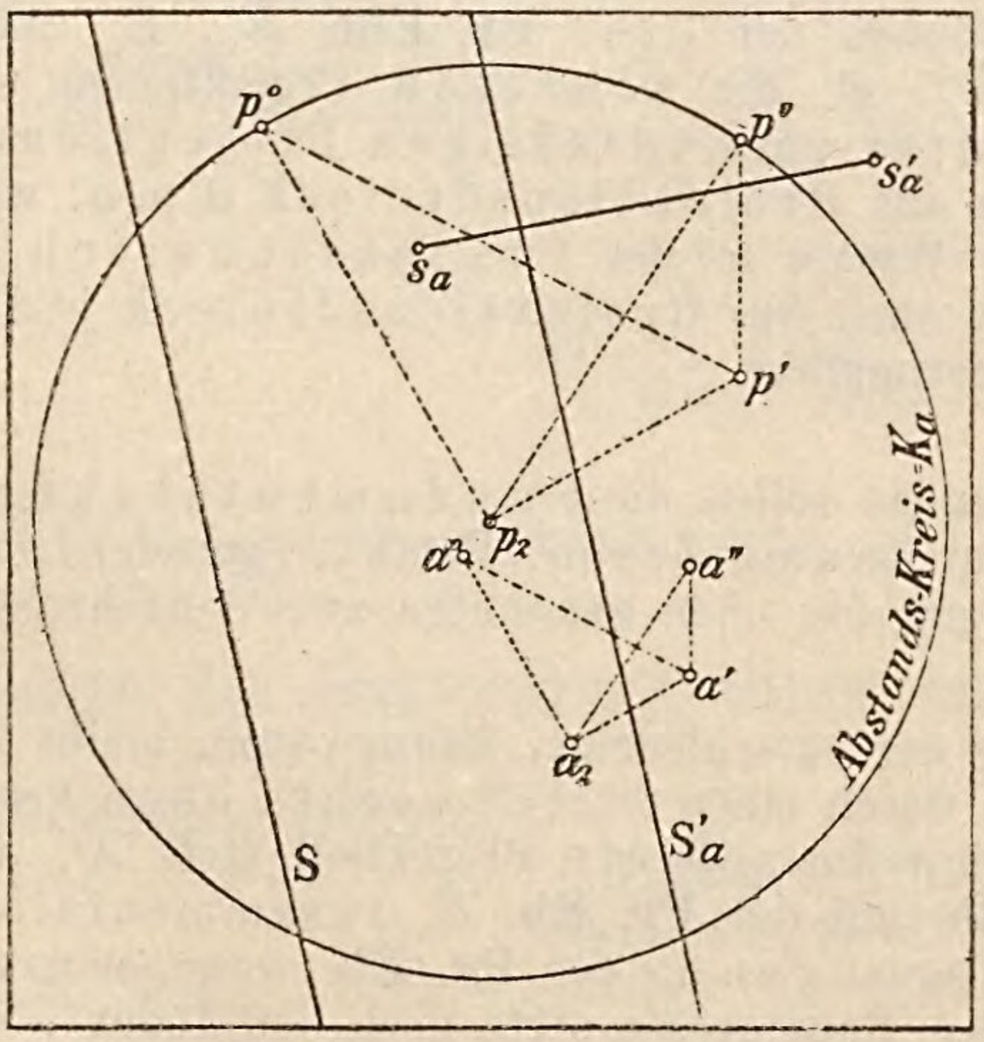
Anmerkung 1. Behufs möglichst einfacher und bequemer Durchführung von geometrischen Konstruktionen in schiefer Projektion bedient man sich vornehmlich zweier Verfahrungsarten; entweder wählt man parallel zur **Pr. Eb.** E_2 eine

Figur 4.



zweite Ebene E_a, die Abstandsebene, siehe Figur 4, in beliebigem Abstande $\overline{p_2 p}$ von E_2 und gibt sich deren Abstand $\overline{p_2 p}$ von der **Pr. Eb.** durch einen in der **Pr. Eb.** um p_2 mit dem Halbmesser $\overline{p_2 p}$ beschriebenen Kreis K_a, den Ab-

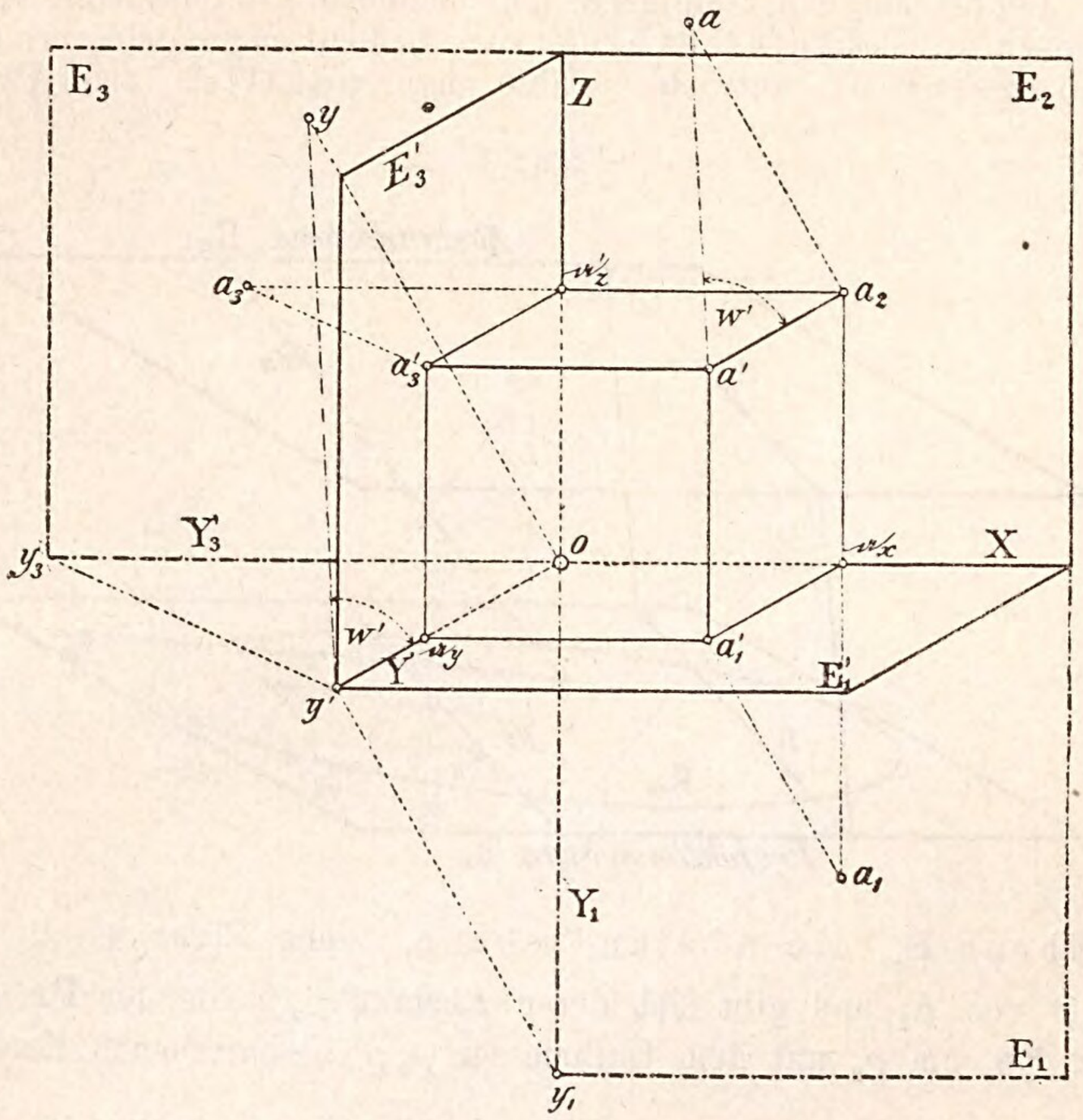
Figur 5.



standskreis. Zur Darstellung von Geraden und Ebenen benutzt man nun deren Durchschnitte s_a und S_a mit der Abstandsebene E_a, indem man deren schiefe Projektionen s'_a und S'_a als bekannt vorausgesetzt und ausserdem die Spuren s und S dieser Raumgrössen als gegeben annimmt, siehe Projektionszeichnung Figur 5, oder man denkt sich entweder die beiden zu einander senk-

rechten **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 oder alle drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 parallel zu einer bestimmten Richtung in eine dieser Ebenen, etwa E_2, projiziert, samt den in den genannten Ebenen befindlichen Projektionen einer Raumgrösse, z. B. des Punktes a, und erhält dann, siehe Figur 6, in E_2, E'_1, E'_3 die

Figur 6.



schiefen Projektionen der drei **Pr. Ebn.** E_2, E_1 und E_3 in die **Pr. Eb.** E_2, sowie in a', a'_1, a'_2, a'_3 die schiefen Projektionen eines Punktes a im Raume und seiner drei rechtwinkligen Projektionen a_1, a_2 und a_3 in der **Pr. Eb.** E_2. Durch das Projektionsdreieck $a' a_2 a$, welches gegeben sein muss ist dann wieder der Winkel w' der Projektionsrichtung mit der **Pr. Eb.** gegeben, und damit auch das Projektionsdreieck jedes anderen Punktes, z. B. y' in $y' o y$ bestimmbar.

Anmerkung 2. Im folgenden sollen die Fundamentalaufgaben über die gegenseitigen Lagen der Raumgrössen, Punkt, (gerade) Linie und (ebene) Fläche, unter zu Grundelegung der oben genannten zwei Verfahrungsarten zur Durchführung gelangen.

Die Bezeichnung der verschiedenen Raumgrössen bleibt die bisherige; nur ist die schiefe Projektion durch einen Strich rechts oben kenntlich gemacht. Für eine Gerade A heisst somit die schiefe Projektion stets A', die rechtwinklige aber A_2, weil die **Pr. Eb.** mit der **Pr. Eb.** E_2 zusammenfallend angenommen werden soll. Werden Umlegungen in der **Pr. Eb.** vorgenommen, so erhält die Bezeichnung der betreffenden Raumgrösse stets noch den Index „Null“ rechts oben angefügt. Heisst ein Dreieck im Raume abc, so führt nach obigem seine schiefe Projektion die Bezeichnung $a'b'c'$, die rechtwinklige $a_2 b_2 c_2$, die wahre Gestalt, d. h. die Umlegung des Dreiecks abc in die **Pr. Eb.** aber die Bezeichnung $a^0 b^0 c^0$.

2) Ueber die schiefe Projektion mit Benützung einer Abstandsebene.

Anmerkung 3. Bei den folgenden Konstruktionen sei stets die rechtwinklige und schiefe Projektion p_2 und p' eines Punktes p der Abstandsebene E_a, sowie der Abstandskreis K_a mit dem Mittelpunkt p_2 als gegeben vorausgesetzt. Hiedurch ist aber das Projektionsdreieck $p_2 p' p^0$ des Punktes p bestimmt, welches bei p den Winkel w' der Projektionsrichtung mit der Projektionsebene enthält.

A) Ueber die Darstellung eines Punktes.

Frage 4. Wie wird ein Punkt in schiefer Projektion dargestellt.

Antwort. Ein Punkt wird dargestellt durch seine rechtwinklige und schiefe Projektion a_2 bezw. a', wobei stets die Verbindungslinie $a_2 a'$ parallel zu $p_2 p'$ sein muss.

Frage 5. Wie konstruiert man den Abstand des in Figur durch $a_2 a'$ dargestellten Punktes von der **Pr. Eb.**

Erkl. 8. Der Abstand eines Punktes heisst positiv oder negativ, je nachdem der Punkt in dem Raume des Beschauers oder im entgegengesetzten Raume, d. h. vor oder hinter der **Pr. Eb.** sich befindet.

Man erkennt dies in der Projektionszeichnung daran, dass im ersten Fall die Strecken $\overline{p_2 p'}$ und $\overline{a_2 a'}$ gleichen, im zweiten Fall aber entgegengesetzte Richtungssinne haben.

Antwort. Genannter Abstand lässt sich in zweifacher Weise konstruieren, entweder man zeichnet das Dreieck $a_2 a' a^0$ ähnlich und ähnlich liegend, siehe Erkl. 266 und 267, I. Teil, dem Dreieck $p_2 p' p^0$, so ist die Kathete $\overline{a_2 a^0}$ gleich dem gesuchten Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.**, oder man zeichnet das Dreieck $p_2 p' p''$ in beliebiger Lage, aber so, dass p'' auf K_a liegt und hierauf das Dreieck $a_2 a' a''$ ähnlich und ähnlich liegend dem Dreieck $p_2 p' p''$, so ist die Strecke $\overline{a_2 a''}$ gleich dem gesuchten Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.**

Soll ein Punkt in der **Pr. Eb.** liegen, so ist sein Abstand von letzterer gleich Null und es fällt in diesem Falle schiefe und rechtwinklige Projektion des Punktes zusammen.

B) Ueber die Darstellung einer Geraden.

Frage 6. Wie wird eine Gerade in schiefer Projektion dargestellt?

Erkl. 9. Hat eine Gerade eine besondere Lage gegen die **Pr. Eb.**, so werden auch die in Antwort der Frage 6 genannten Bestimmungsstücke eine besondere Lage zu einander einnehmen; die besonderen Lagen, welche eine Gerade gegen die **Pr. Eb.** einnehmen kann, sind:

1. die Gerade läuft parallel zur Projektionsrichtung;

Antwort. Eine Gerade kann in mehrfacher Weise dargestellt werden, entweder gibt man nämlich von derselben

a) zwei Punkte, je durch rechtwinklige und schiefe Projektion, siehe Figur 7, Gerade ab, oder

b) ihre rechtwinklige Projektion A_2 und ihre schiefe Projektion A', siehe Figur 8, oder

2. die Gerade läuft parallel zur **Pr. Eb.**;
3. die Gerade steht senkrecht zur **Pr. Eb.**

Im Fall 1 erhält man als schiefe Projektion einen Punkt, nämlich die Spur der Geraden, siehe auch Frage und Antwort 13, I. Teil.

Im Fall 2 liegen die Spuren s und s_a, wie auch deren schiefe Projektionen s und s'_a, in unendlicher Ferne, d. h. die schiefe und rechtwinklige Projektion der Geraden laufen zu einander parallel. Will man nun eine zur **Pr. Eb.** parallele Gerade in schiefer Projektion darstellen, so darf man nur schiefe und rechtwinklige Projektion zu einander parallel annehmen, oder man gibt sich die schiefe Projektion der Geraden willkürlich, sowie einen Punkt von ihr durch schiefe und rechtwinklige Projektion.

Im Fall 3 fällt die schiefe Projektion der Geraden in eine Parallele zur Linie $p_2 p'$ und die Spuren s und s'_a der Geraden haben eine Entfernung von einander gleich der Strecke $\overline{p_2 p'}$.

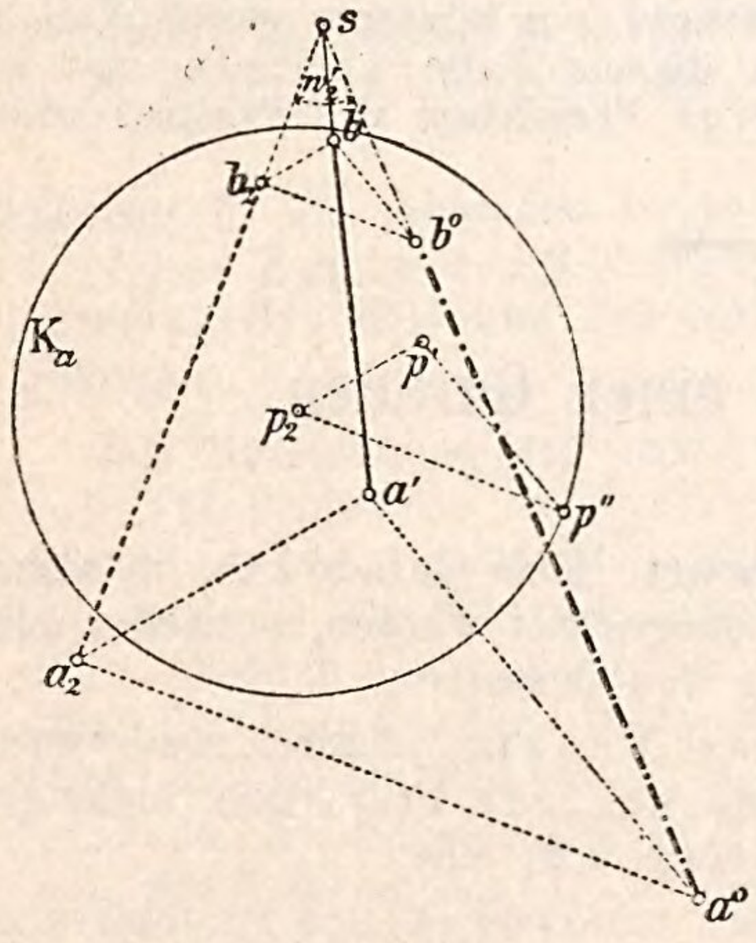
Es lässt sich somit auch in schiefer Projektion in einfacher Weise eine Gerade von bestimmter Lage gegen **Pr. Eb.** und Projektionsrichtung in der Projektionszeichnung darstellen, wie auch umgekehrt bei gegebener Projektionszeichnung aus letzterer die Lage der dargestellten Geraden im Raume erkennen.

c) ihre Spur s und die schiefe Projektion s'_a ihrer Spur s_a mit der Abstandsebene E_a, siehe Figur 8.

In jedem der drei Fälle a bis c ist die Lage der Geraden gegen die **Pr. Eb.** E' bestimmbar.

Frage 7. Wie ermittelt man in den in Antwort der Frage 6 unter a bis c angeführten Fällen die Neigung der Geraden gegen die **Pr. Eb.**, sowie die wahre Länge einer bestimmten Strecke derselben?

Figur 7.



Antwort a. Sind, siehe Figur 7, $\overline{a_2 a'}$ und $b_2 b'$ die gegebenen Punkte, so ist $\overline{a_2 b_2}$ die rechtwinklige Projektion der Strecke $\overline{a\,b}$. Denkt man sich nun die durch $a\,b$ gehende rechtwinklig projizierende Ebene umgelegt, so liegen die Umlegungen a^0 und b^0 der Punkte a und b in den Senkrechten durch a_2 und b_2 zu $a_2 b_2$, sowie in den Parallelen $a' a^0$ und $b' b^0$ zu $p' p''$, vorausgesetzt, dass p'' in der Senkrechten durch p_2 zu $a_2 b_2$ auf K_a liegt. Die Linien $a_0 b_0$ und $a_2 b_2$ schneiden sich in s, der Spur von $a\,b$ und schliessen den Neigungswinkel w'_2 der Geraden $a\,b$ mit der **Pr. Eb.** ein.

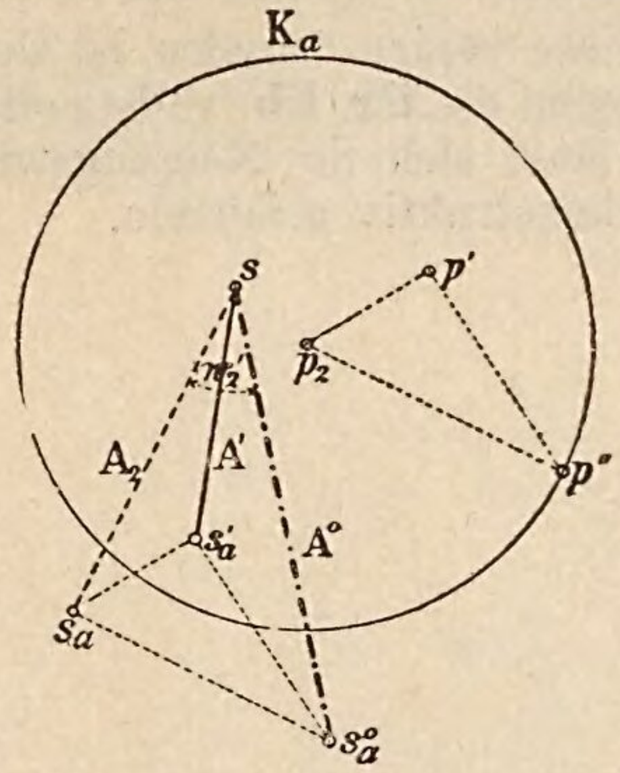
Aus der Figur 7 ersieht man direkt folgende Beziehungen. Es ist

$$\frac{\overline{s\,a_2}}{\overline{s\,b_2}} = \frac{\overline{s\,a'}}{\overline{s\,b'}} = \frac{\overline{s\,a^0}}{\overline{s\,b^0}} \quad \ldots . \quad 1)$$

Wäre statt des Punktes s ein beliebiger Punkt c auf der Geraden $a\,b$ gewählt worden, so beständen in gleicher Weise die Beziehungen

$\frac{\overline{c_2 a_2}}{\overline{c'\,a'}} = \frac{\overline{c_2 b_2}}{\overline{c'\,b'}} = \frac{\overline{c^0 a^0}}{\overline{c^0 b^0}}$, woraus folgt, dass

Figur 8.



durch eine schiefe Parallelprojektion das Teilverhältnis einer Strecke ungeändert bleibt. Siehe auch Antwort der Frage 17, I. Teil.

Antwort b. Ist die Gerade durch A_2 und A', siehe Figur 8, gegeben, so liesse sich die Umlegung A^0 in der gleichen Weise wie im Falle a mittels eines beliebigen auf A gewählten Punktes bestimmen; in der Figur 8 wurden die Punkte s_a und s'_a so gewählt, dass $\overline{s_a s'_a}$ gleich und parallel $\overline{p_2 p'}$ ist, dann stellen s_a und s'_a rechtwinklige und schiefwinklige Projektion des Durchschnitts s_a von A mit der Abstandsebene E_a dar. Die Umlegung von s_a gelangt nach s°_a, $\overline{s_a s^\circ_a}$ gleich und parallel $\overline{p_2 p''}$ und es ist w'_2 wieder der Neigungswinkel von A mit der **Pr. Eb.** und die Strecke $\overline{s s^\circ_a}$ die Länge des von den beiden Ebenen E_2 und E_a begrenzten Stückes der Geraden A.

Antwort c. Sind die Punkte s und s'_a, siehe Figur 8, direkt gegeben, so liefert die Verbindungslinie ss'_a die schiefe Projektion A' der Geraden A, macht man ferner $\overline{s'_a s_a}$ gleich und parallel $\overline{p_2 p'}$, so ist hiedurch A_2 bestimmt. Alles Weitere bleibt wie im Fall b.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Von einer Geraden ab kennt man ihre schiefe Projektion $a'b'$ und ihren Neigungswinkel w'_2 mit der **Pr. Eb.** Man soll den Abstand der Punkte a und b von der **Pr. Eb.**, sowie die wahre Länge der Strecke $\overline{ab}$ konstruieren. Vergl. auch Aufgabe 3, I. Teil.

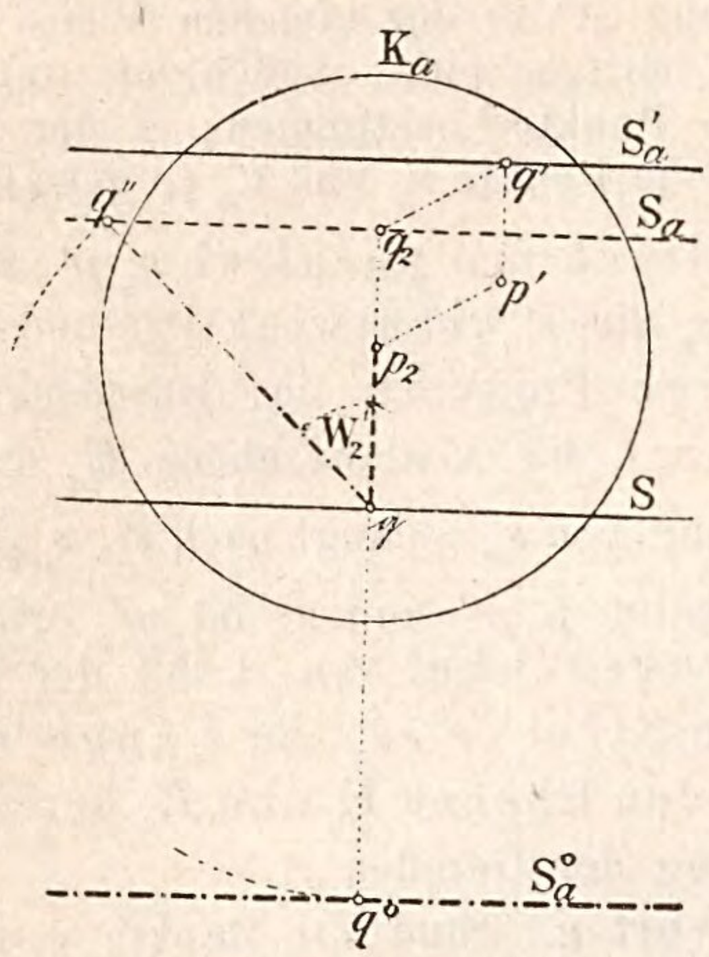
Aufgabe 2. Von einer Geraden ab kennt man ihre schiefe Projektion, sowie die Abstände ihrer Endpunkte von der **Pr. Eb.** Man soll die schiefe Projektion eines Punktes c der Geraden ab konstruieren, dessen Abstand von der **Pr. Eb.** eine gegebene Grösse habe. Vergl. auch Aufgabe 4, I. Teil.

Aufgabe 3. Man löse die Aufgaben 6 bis 10, I. Teil, in schiefer Projektion, wenn unter den gegebenen Projektionen stets die schiefen Projektionen der betreffenden Raumgrössen verstanden sein sollen.

C) Ueber die Darstellung einer Ebene.

Frage 8. Wie wird eine Ebene in schiefer Projektion dargestellt.

Figur 9.



Antwort. Von einer Ebene gibt man zweckmässig ihre Spur S, siehe Figur 4, 5 und 9, sowie die schiefe Projektion S'_a ihrer Schnittlinie S_a mit der Abstandsebene. Durch diese beiden Geraden ist die Lage der Ebene gegen die **Pr. Eb.** vollständig bestimmt und es lässt sich ihr Neigungswinkel gegen letztere konstruktiv ermitteln.

Frage 9. Wie konstruiert man für eine Ebene $S\,S'_a$ ihren Neigungswinkel mit der **Pr. Eb.**?

Antwort. Zieht man, siehe Figur 9, durch p' die Senkrechte $p'\,q'$ zu S'_a und bestimmt q_2 als rechtwinklige Projektion von q, so ist $\overline{q'\,q_2}$ gleich und parallel $\overline{p'\,p_2}$; durch q_2 geht parallel zu S'_a die rechtwinklige Projektion S_a der Geraden S_a. Es ist somit die durch q_2 senkrecht zu S gezogene Gerade $q_2\,\mathfrak{q}$ die rechtwinklige Projektion der durch q gehenden Neigungslinie der Ebene $S\,S'_a$ und das Dreieck $q_2\,\mathfrak{q}\,q''$ ($\overline{q_2\,q''}$ gleich dem Halbmesser des Abstandskreises K_a) die Umlegung des Konstruktionsdreiecks, siehe Erkl. 77, I. Teil, des Punktes q; in demselben ist bei $\mathfrak{q}$ der Winkel W'_2 der Ebene $S\,S'_a$ mit der **Pr. Eb.** enthalten.

Nunmehr kann zugleich die Umlegung der Ebene um ihre Spur S in die **Pr. Eb.**, wie in rechtwinkliger Projektion vorgenommen werden. So kommt z. B. die Umlegung des Punktes q nach q^0 (es ist $\mathfrak{q}\,q^0$ senkrecht zu S und gleich $q''\,\mathfrak{q}$ abzutragen) und durch q^0 geht parallel zu S die Umlegung S^0_a der Geraden S_a der Ebene.

Erkl. 10. Was die besonderen Lagen einer Ebene gegen die **Pr. Eb.** anbelangt, so können folgende Fälle eintreten:

1. die Ebene läuft parallel zur Projektionsrichtung;
2. die Ebene läuft parallel zur **Pr. Eb.**;
3. die Ebene steht senkrecht zur **Pr. Eb.**

Im Fall 1 liegen die Geraden S_a und S'_a in einander, d. h. die Ebene wird dargestellt sein lediglich durch ihre Spur; in diesem Fall kann man die Ebene eine projizierende Ebene nennen. Im Fall 2 liegen die beiden Spuren S_a und S'_a in unendlicher Ferne, und die Ebene ist bestimmt, sobald man einen Punkt von derselben kennt.

Steht die Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.**, so kann die Spur S_a und damit auch S'_a eine beliebige Richtung haben, doch ist der Abstand zwischen S_a und S'_a nicht mehr beliebig, sondern von bestimmter Grösse. Es muss nämlich jede zwischen den Geraden S_a und S'_a liegende zu $p_2\,p'$ parallele Strecke eine Länge gleich $\overline{p_2\,p'}$ besitzen. Man kann somit auch in schiefer Projektion eine Ebene von bestimmter Lage gegen **Pr. Eb.** und Projektionsrichtung in der Projektionszeichnung darstellen und umgekehrt aus letzterer auf die Lage einer dargestellten Ebene im Raume schliessen.

D) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander.

a) Lagen von Punkt und Gerade.

Frage 10. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung bei der Darstellung in schiefer Projektion die Lage eines Punktes zu einer Geraden?

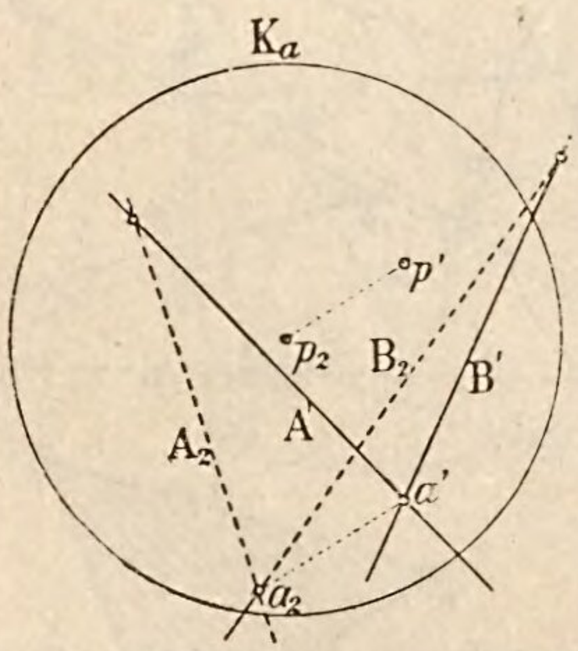
Antwort. Nach Antwort der Frage 19, I. Teil, kann ein Punkt entweder auf einer Geraden liegen oder nicht. Ist nun eine Grade durch schiefe und rechtw. Projektion gegeben, so liegt der Punkt auf der Geraden, wenn schiefe und rechtw. Projektion von Punkt und Gerade aufeinanderfallen. Ist aber die Grade durch ihre Spuren s und s'_a gegeben, so liegt der Punkt stets auf der Geraden, wenn die schiefe Projektion von Punkt und Gerade sich decken; im anderen Fall nicht.

---

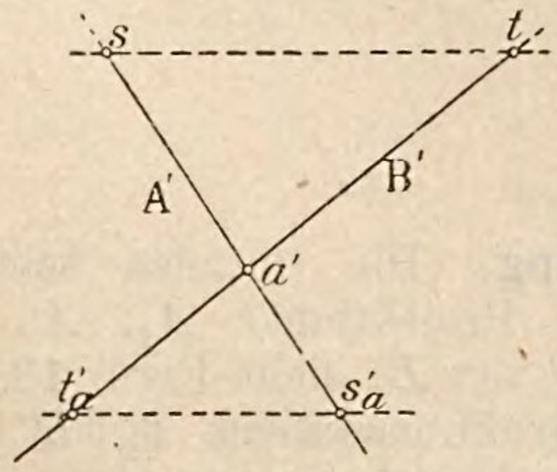
b) Lagen zweier Geraden.

Frage 11. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung bei der Darstellung in schiefer Projektion die möglichen Lagen zweier Geraden?

Figur 10.



Figur 11.



Antwort. Nach Antwort der Frage 21, I. Teil, können zwei Gerade

a) sich schneiden,
b) parallel sein,
c) windschief liegen.

Sind im Fall a die Geraden durch schiefe und rechtw. Projektion gegeben, so werden sie sich schneiden, wenn die Verbindungslinie $a' a_2$, siehe Figur 10, der Schnittpunkte der schiefen und rechtw. Projektionen der Geraden parallel zu $p' p_2$ läuft. Sind aber die Geraden je durch ihre Spuren s, s'_a und t, t'_a gegeben, so müssen, damit ein Schneiden der Geraden stattfinden kann, zunächst die schiefen Projektionen sich schneiden, ausserdem müssen aber die Verbindungslinien $s\,t$ und $s'_a\,t'_a$, siehe Figur 11, zu einander parallel laufen. Will man daher zwei sich schneidende Gerade in der Projektionszeichnung darstellen, so darf man von der einen Geraden die Spuren s und s'_a ganz beliebig wählen, von der anderen Geraden aber nur noch eine der Spuren entweder t oder t'_a.

Im Fall b müssen die schiefen und rechtw. Projektionen zu einander parallel laufen, im übrigen bleibt die Bestimmung dieselbe, wie im Fall a.

Sind die Geraden windschief, so können von beiden ihre Spuren ganz beliebig gewählt werden, d. h. es können ihre schiefen und rechtw. Projektionen willkürlich gegen einander liegen.

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 4. Drei Punkte a, b, c, siehe Figur 12, sind durch ihre rechtw. und schiefen Projektionen gegeben. Man soll die wahre Gestalt des Dreiecks abc zeichnen.

Erkl. 11. Verbindet man die Punkte a^0, b^0 und c^0 mit den schiefen Projektionen a', b', c', so erkennt man unmittelbar die Aehnlichkeit der Dreiecke $a_2 a' a^0$, $b_2 b' b^0$, $c_2 c' c^0$, woraus einerseits der Parallelismus der Linien $a' a^0$, $b' b^0$, $c' c^0$, und damit die Affinität zwischen schiefer Projektion und Umlegung, andererseits aber auch die Affinität zwischen rechtw. und schiefer Projektion einer ebenen Figur folgt.

Aus dem eben Gesagten ergeben sich folgende Sätze:

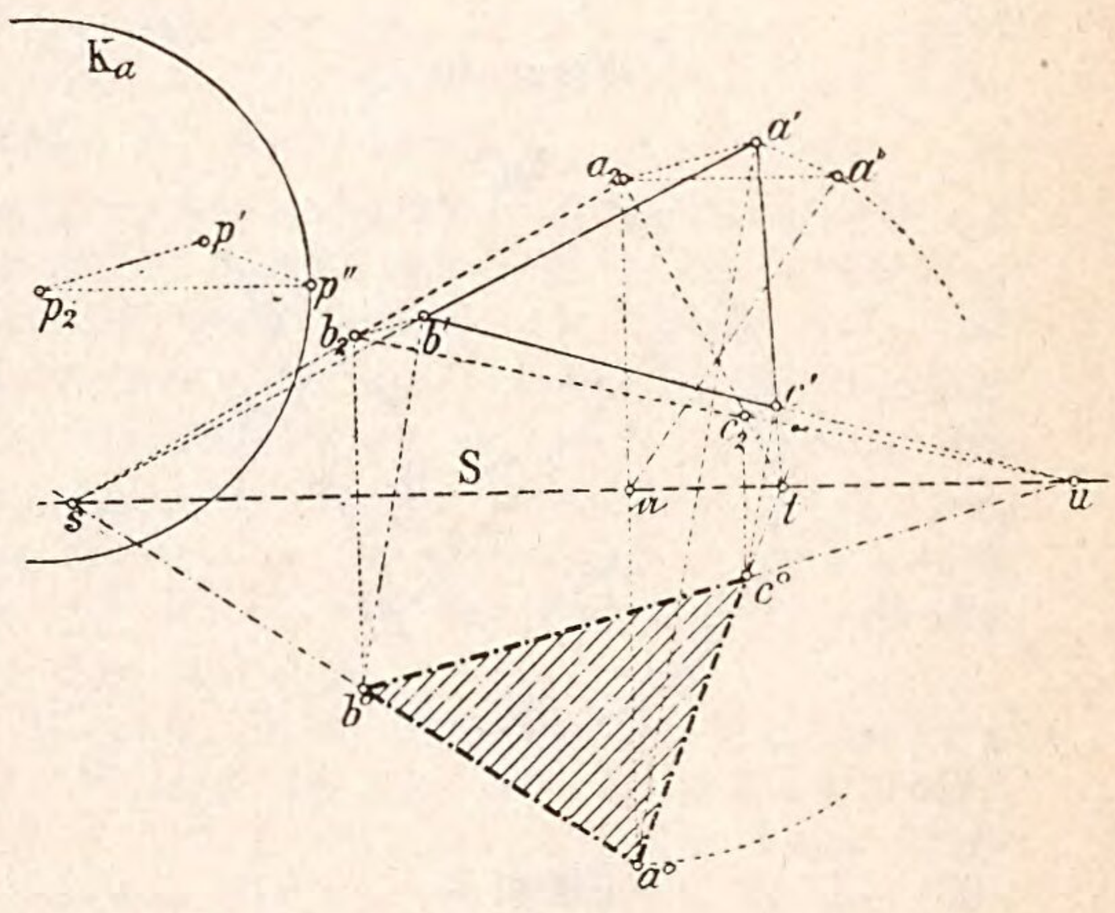
„Sowohl die **rechtw.** als auch die **schiefe** Projektion einer ebenen Figur stehen in affiner Beziehung zur Umlegung, d. h. zur wahren Gestalt der ebenen Figur mit der Spur der Ebene als Affinitätsachse."

„Kennt man von einer ebenen Figur die Spuren der Ebene, sowie die schiefe oder rechtw. Projektion, so lässt sich ihre rechtwinklige oder schiefe Projetion mittels der eben genannten Affinitätsbeziehung konstruieren."

„Kennt man von einer ebenen Figur die Spuren der Ebene, die schiefe Projektion, sowie einen Punkt der Umlegung der ebenen Figur, so lässt sich letztere mittels der zwischen schiefer Projektion und Umlegung bestehenden Affinitätsbeziehung, unabhängig von der rechtwinkligen Projektion konstruieren.

Auflösungen. Die Schnittpunkte der Verbindungslinien $a_2 b_2$ und $a' b'$, $a_2 c_2$ und $a' c'$, $b_2 c_2$ und $b' c'$ liefern die Punkte s, t und u der Spur S der Dreiecksebene. Legt man nun die Ebene abc um ihre Spur S in die **Pr. Eb.** um, so braucht man zu diesem Zwecke nur das Konstruktionsdreieck eines der drei Punkte, etwa des Punktes a zu bestimmen $a_2 a''$ parallel $p_2 p''$, $p' p''$ parallel $a' a''$ und erhält in a^0 ($\overline{a a''} = \overline{a a^0}$) die Umlegung des Punktes a, in $s a^0$ und $t a^0$ die Umlegungen der Dreiecksebene ab und ac, auf welchen noch die beiden übrigen Punkte b^0 und c^0 liegen.

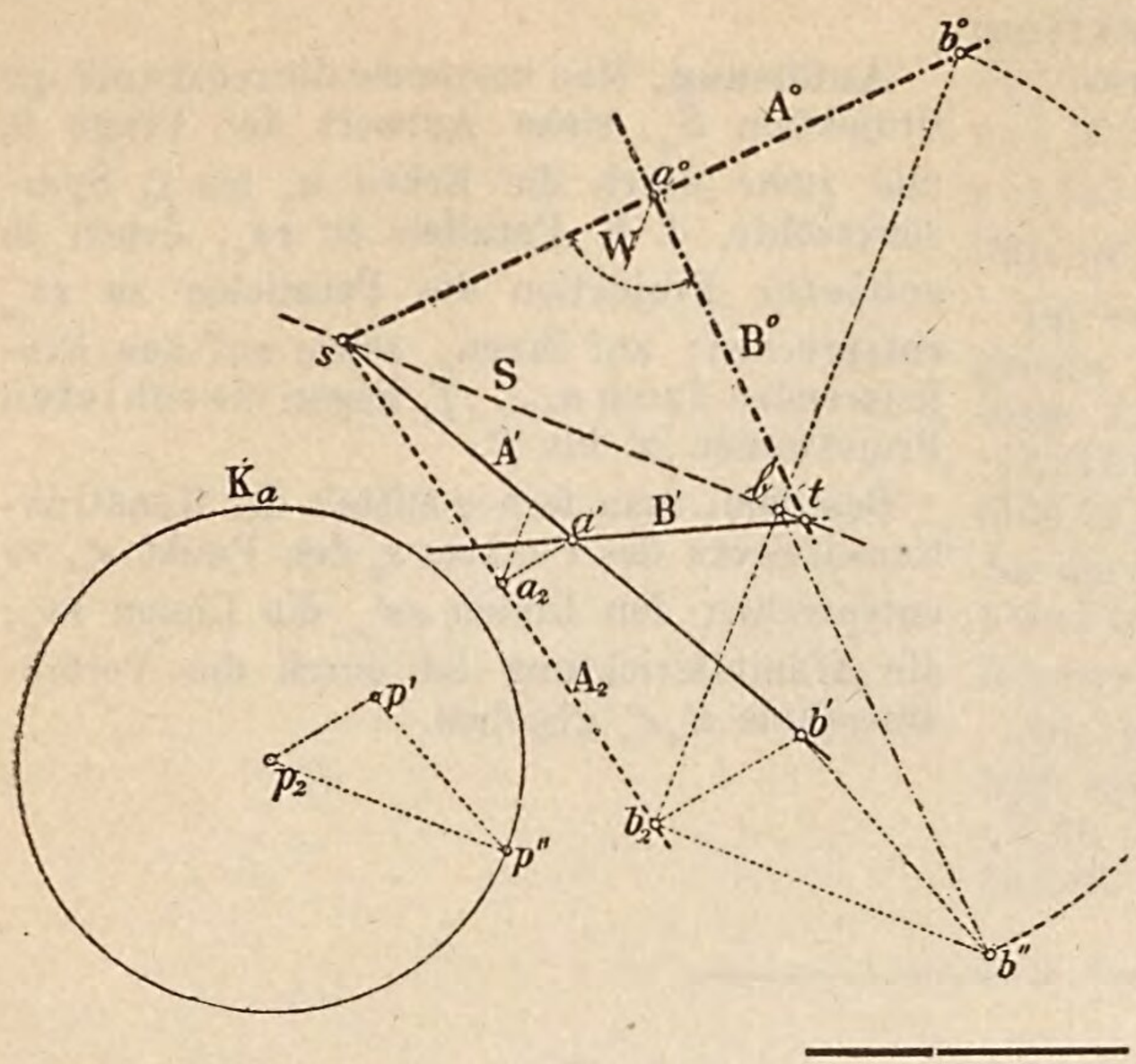
Figur 12.



Aufgabe 5. Man soll die den Winkel zweier sich schneidenden Geraden in wahrer Grösse konstruieren.

Auflösung. Die Geraden seien gegeben durch ihre Projektionen A_2, A', B', sowie die Spur t von B, siehe Figur 13. Ermittele das Konstruktionsdreieck $b_2 \mathfrak{b} b''$ eines beliebigen Punktes b von A, sowie dessen Umlegung b^0. Die Parallele durch a' zu $p_2 p'$

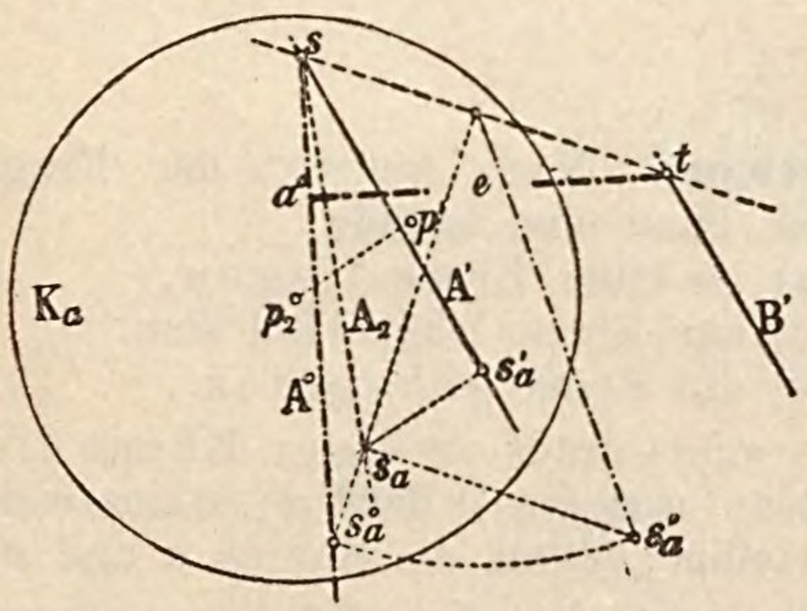
Figur 13.



liefert auf sb_2 oder A_2 den Punkt a_2, dem auf A^0 der Punkt a^0 entspricht. Die Linie $a_0 t$ oder B^0 schliesst mit A^0 den gesuchten Winkel W ein.

Aufgabe 6. Man soll die Entfernung von zweien parallelen Geraden A und B, Gerade A sei gegeben durch s und s'_a, Gerade B durch B' und t, siehe Figur 14, in wahrer Grösse konstruieren.

Figur 14.



Auflösung. Bestimme zunächst wieder das Konstruktionsdreieck eines beliebigen Punktes, etwa gleich des Punktes s_a von A, desgleichen die Umlegung s^0_a, sowie A^0 von A. Die Senkrechte $\overline{ta^0} = e$ von t auf A^0 gibt die gesuchte Entfernung in wahrer Grösse an.

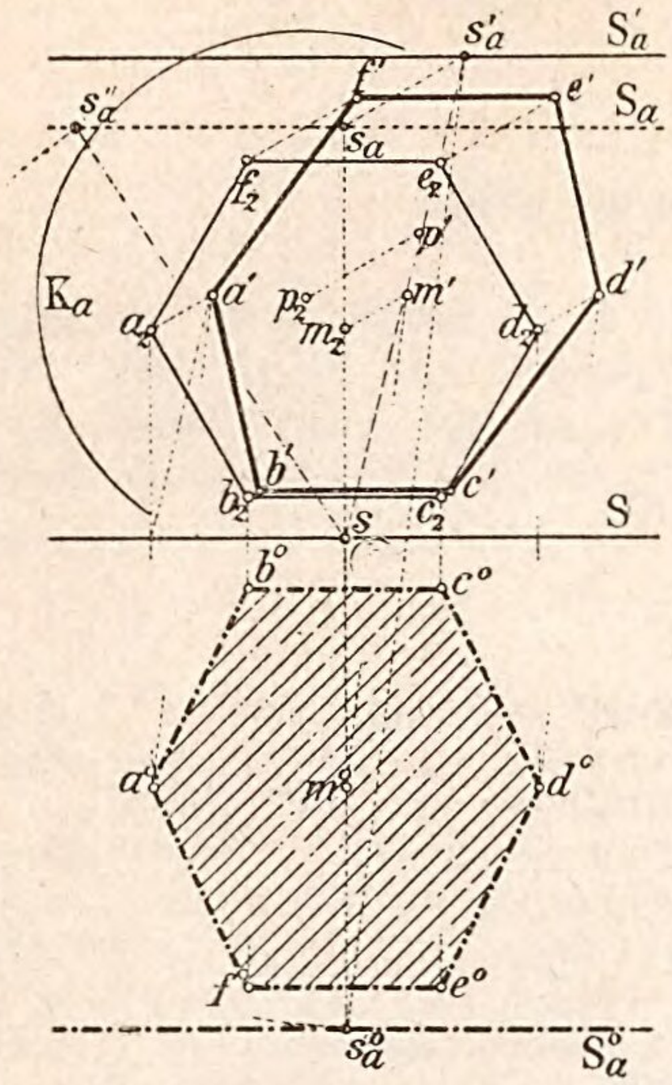
Aufgabe 7. Man soll die Entfernung eines Punktes a von einer Geraden B in wahrer Grösse konstruieren.

Auflösung. Man ziehe durch den Punkt a eine Parallele C zur Geraden B (rechtw. und schiefe Projektion sind bezw. zu einander parallel, siehe Frage und Antwort 11, Fall b) und bestimme die Entfernung der Geraden B und C wie in Aufgabe 6.

Aufgabe 8. In der durch S und S'_a gegebenen Ebene liegt ein Vieleck, dessen rechtw. Projektion als ein regelmässiges

Sechseck $a_2 \ldots . f_2$, siehe Figur **15**, gegeben ist. Man soll dessen schiefe Projektion, sowie seine wahre Gestalt zeichnen.

Figur 15.



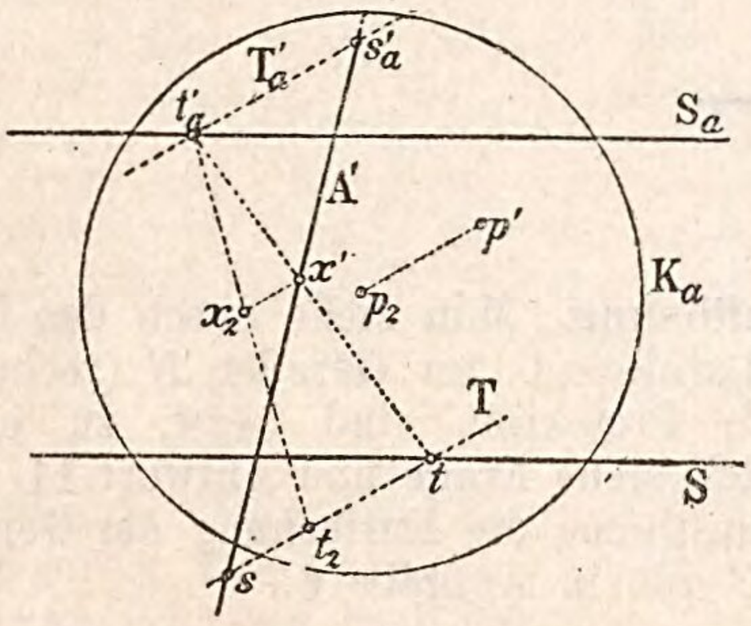
Auflösung. Man bestimme die rechtwinklige Projektion S_a, siehe Antwort der Frage 9, und ziehe durch die Ecken a_2 bis f_2 Spursenkrechte, d. h. Parallele zu ss_a, denen in schiefer Projektion die Parallelen zu ss'_a entsprechen; auf ihnen, sowie auf den Projizierenden durch $a_2 \ldots f_2$ liegen die schiefen Projektionen a' bis f'.

Bestimmt man ferner mittels des Konstruktionsdreiecks des Punktes s_a den Punkt s°_a, so entsprechen den Linien ss'_a die Linien ss°_a; die Affinitätsrichtung ist durch die Verbindungslinie $s'_a s^\circ_a$ gegeben.

c) Lagen von Gerade und Ebene im allgemeinen.

Frage 12. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung bei der Darstellung in schiefer Projektion die möglichen Lagen zwischen einer Geraden und einer Ebene?

Figur 16.



Antwort. Nach Antwort der Frage 30, I. Teil, kann eine Gerade

a) in einer Ebene liegen,
b) zur Ebene parallel sein,
c) die Ebene schneiden.

Soll eine Gerade in einer Ebene liegen, so erkennt man dies in der Projektionszeichnung unmittelbar, wenn die Spuren s und s'_a der Geraden auf die diesbezüglichen Spuren S und S'_a der Ebene fallen. Liegt also z. B. eine der Spuren s oder s'_a einer Geraden, nicht in der bezüglichen Spur S oder S'_a der Ebene, so ist damit gekennzeichnet, dass auch die Gerade nicht in der Ebene sich befindet.

Im Fall b lässt sich unmittelbar nicht erkennen, ob eine Gerade parallel zur Ebene läuft; man erhält hierüber aber Gewissheit, wenn man durch die Spuren s und s'_a der Geraden, siehe Figur 16, in beliebiger Richtung zwei Parallele T und T'_a zieht und dieselben als Spuren einer die Gerade ss'_a enthaltenden Ebene betrachtet. Diese

Parallelen treffen die Spuren S und S'_a der gegebenen Ebene in zweien Punkten t und t'_a, den Spuren einer beiden Ebenen SS'_a und TT'_a angehörenden Geraden, deren schiefe Projektion tt'_a zur Verbindungslinie ss'_a parallel oder geneigt sein kann.

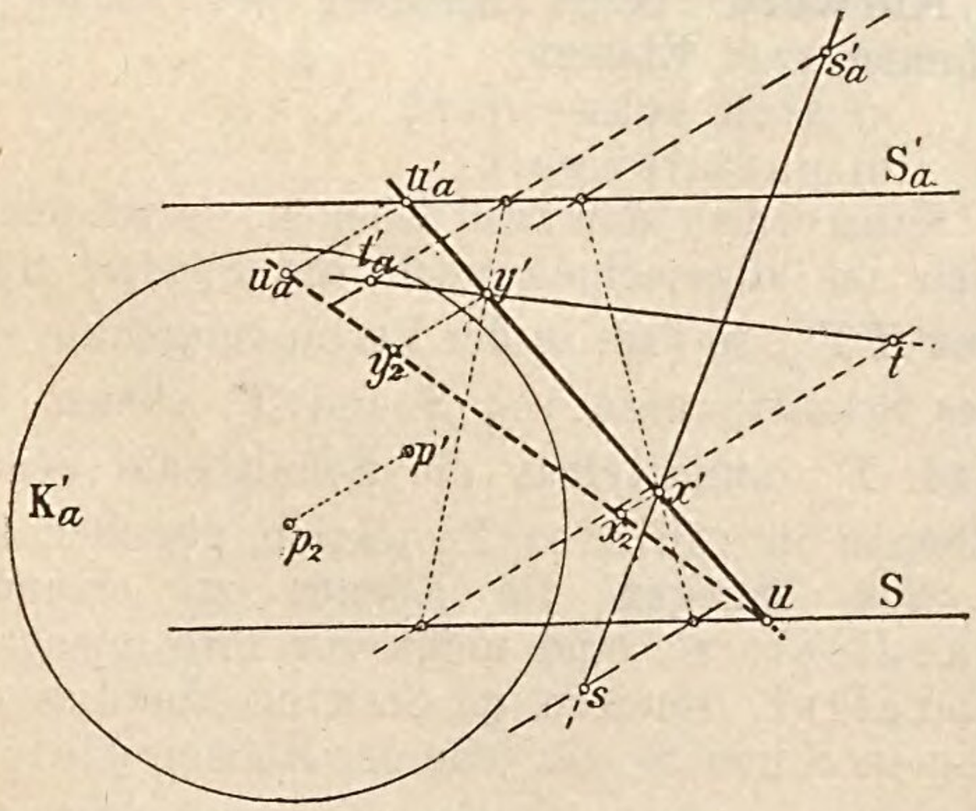
Im ersten Fall wird dann auch die gegebene Gerade parallel zur Ebene sein, siehe Antwort der Frage 31, I. Teil, im letzteren Fall dagegen hat die Verbindungslinie tt'_a mit ss'_a einen Punkt x' gemein, der die schiefe Projektion des Schnittpunktes der Geraden ss'_a mit der Ebene SS'_a darstellt.

Die eben durchgeführte Untersuchung enthält also zugleich die Lösung der Aufgabe. „Man soll den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene konstruieren.“

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Man soll in einer gegebenen Ebene SS'_a, siehe Figur 17, eine Gerade zeichnen, welche zwei gegebene Geraden ss'_a und tt'_a schneidet.

Figur 17.



Auflösung. Man ermittle, siehe Figur 17, die Schnittpunkte x und y der beiden Geraden ss'_a und tt'_a, wie in Antwort der Frage 12 angegeben, mit der gegebenen Ebene; ihre Verbindungslinie ist die gesuchte Gerade.

Aufgabe 10. Durch einen gegebenen Punkt a ist eine Gerade zu zeichnen parallel zu einer Ebene.

Auflösung. Man wähle in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade und ziehe durch a eine Parallele hiezu.

Aufgabe 11. Man soll parallel zu einer gegebenen Geraden A eine Gerade

zeichnen, welche zwei weitere Gerade B und C schneidet.

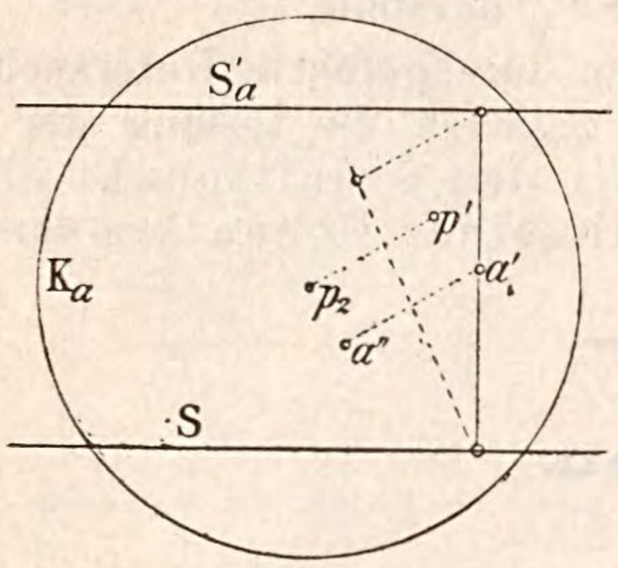
Auflösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der Geraden B eine Gerade C parallel zu A und bestimmt den Schnittpunkt x von C mit Ebene BC.

---

d) Lagen von Punkt und Ebene.

Frage 13. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung bei der Darstellung in schiefer Projektion die môglichen Lagen eines Punktes zu einer Ebene?

Figur 18.



Antwort. Ein Punkt kann entweder in der Ebene oder ausserhalb derselben sich befinden, im ersten Fall muss derselbe auf einer Geraden der Ebene liegen. Ist daher SS'_a die Ebene, $a_2\,a'$ der gegebene Punkt, so ziehe man durch a' eine beliebige Gerade der Ebene etwa gleich die Senkrechte zu den Spuren und bestimme ihre rechtwinklige Projektion, siehe Antwort der Frage 9. Je nachdem nun a_2 auf dieser rechtw. Projektion liegt oder nicht, befindet sich der Punkt a in der Ebene oder nicht.

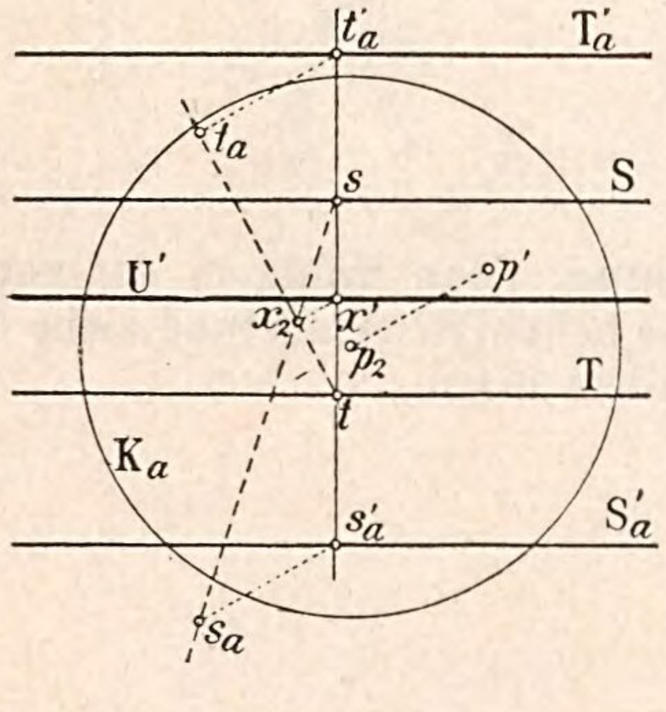
---

e) Lagen zweier Ebenen.

Frage 14. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung bei der Darstellung in schiefer Projektion die möglichen Lagen zweier Ebenen?

Erkl. 12. Aus dem in den Antworten der Fragen 12 und 14 Gesagten geht hervor, dass man auch bei der Darstellung in schiefer Projektion die gegenseitigen Lagen der Raumgrössen, Punkt, Gerade und Ebene, zu einander in der Projektionszeichnung entweder unmittelbar, d. h. ohne vorhergehende Konstruktion erkennen oder doch in einfacher Weise konstruktiv ermitteln kann.

Figur 19.



Antwort. Nach Antwort der Frage 39 können zwei Ebenen

a) sich schneiden,
b) parallel sein.

Schneiden sich zwei Ebenen, so schneiden sich im allgemeinen auch die Spuren SS'_a und TT'_a, so dass in der Verbindungslinie ss'_a der Schnittpunkte von S und T, ebenso S'_a und T'_a unmittelbar die Schnittlinie beider Ebenen in schiefer Projektion gegeben ist.

Sind dagegen die Ebenen zu einander parallel, so sind nicht nur ihre Spuren parallel, sondern es besitzen überdies die Linien S und S'_a für jede der Ebenen gleiche Entfernung von einander, und zwar für beide Ebenen gemessen in gleichem Sinne. Laufen aber die Spuren S und T zu einander parallel, während die Entfernungen der Linien S und S'_a, ebenso T und T'_a ungleich gross sind, so schneiden sich die Ebenen, aber die Schnittlinie läuft selbst parallel zu den genannten Spuren. Man erhält die Schnittlinie beider Ebenen in diesem Fall einfach durch Zeichnung einer Geraden senkrecht zu den Spuren beider Ebenen, siehe Figur 19, welche als schiefe Projektion einer

Geraden ss'_a der einen, als auch einer Geraden tt'_a der andern Ebene genommen werden kann. Die zugehörigen rechtw. Projektionen ss_a und tt_a schneiden sich in einem Punkt x_2, dem als schiefe Projektion der Punkt x' entspricht, durch welchen die schiefe Projektion der Schnittlinie U beider Ebenen hindurchgeht.

---

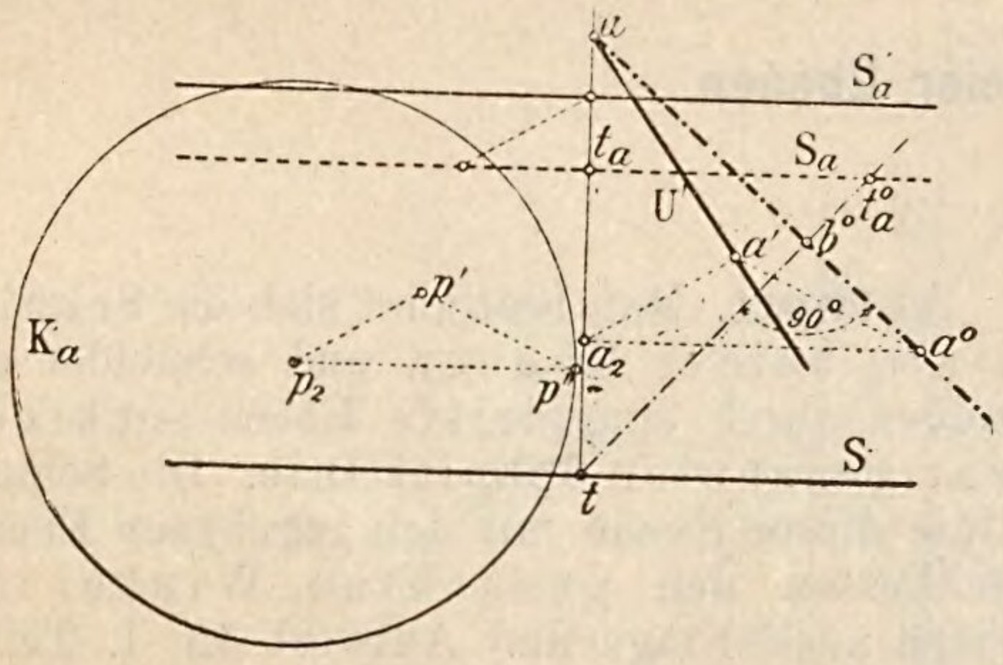
f) Senkrecht stehen einer Geraden zu einer Ebene.

Frage 15. Wie konstruiert man bei der Darstellung in schiefer Projektion durch einen gegebenen Punkt

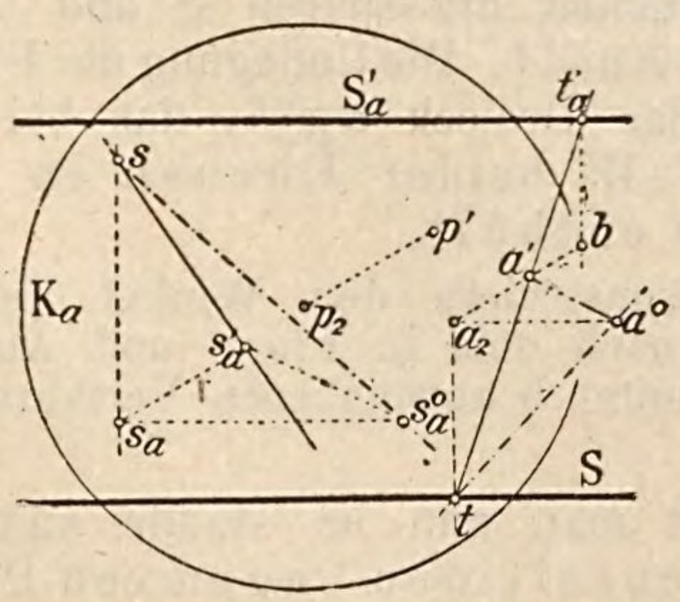
a) eine Gerade senkrecht zu einer Ebene,

b) eine Ebene senkrecht zu einer Geraden.

Figur 20.



Figur 21.



Antwort a. Ist durch SS'_a eine Ebene gegeben und will man etwa durch den Punkt a eine zur Ebene SS'_a senkrechte Gerade zeichnen, so bestimmt man zunächst, siehe Figur 20, die rechtw. Projektion S_a von S'_a, zieht durch a_2 die Senkrechte tt_a als Neigungslinie der Ebene SS'_a, siehe Erkl. 74, I. Teil, und zeichnet das Konstruktionsdreieck $tt_at_a^\circ$ des Punktes t_a; ferner die Umlegung a^0 von a ($\overline{a_2a^0}$ senkrecht zu tt_a und gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.**), so liefert die durch a^0 zu tt_a° gezogene Senkrechte a^0u auf tt_a die Spur u der gesuchten Senkrechten. Deren schiefe Projektion ist somit die Verbindungslinie ua'.

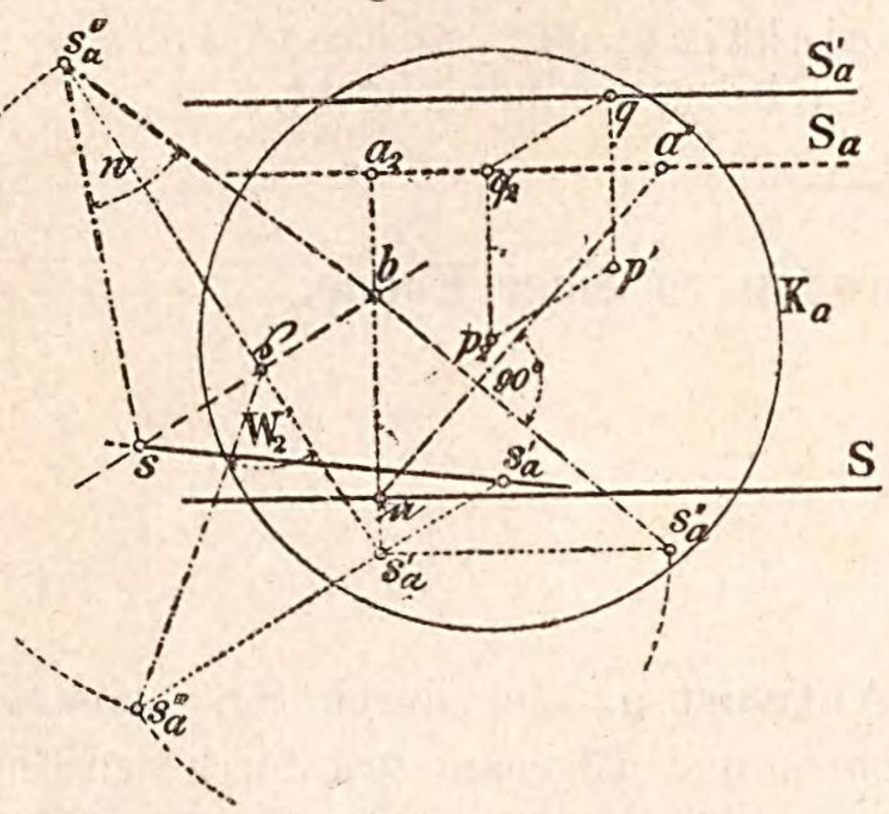
Antwort b. Ist durch ss'_a, siehe Figur 21, eine Gerade gegeben und soll durch den Punkt a_2a' eine Ebene senkrecht zur Geraden ss'_a konstruiert werden, so verschaffe man sich zunächst die rechtwinklige Projektion ss_a, sowie die Umlegung ss_a° der gegebenen Geraden, ziehe $\overline{a_2a^0}$ senkrecht ss_a und gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** und durch a^0 die Senkrechte zu ss_a°, so liefert diese auf der durch a_2 zu ss_a gezogenen Parallele einen Punkt t der Spur S der gesuchten Ebene, welche senkrecht zu ss_a nunmehr gezogen werden kann. Zieht man ferner durch a_2 die Gerade $\overline{a_2b}$ gleich und parallel zu p_2p', so gibt die Senkrechte durch b zu S auf der Linie ta' einen Punkt t'_a der schiefen Projektion der Schnittlinie S_a der gesuchten Ebene mit der Abstandsebene.

---

g) Winkel einer Geraden mit einer Ebene.

Frage 16. Wie konstruiert man bei der Darstellung in schiefer Projektion den Winkel einer Geraden mit einer Ebene?

Figur 22.



Antwort. Man verschafft sich zweckmässig den Winkel einer Senkrechten (Normalen) zur Ebene mit der gegebenen Geraden, siehe Erkl. 12, sowie Frage und Antwort 43, I. Teil, dessen Complementswinkel ist dann der gesuchte Winkel der Geraden und Ebene.

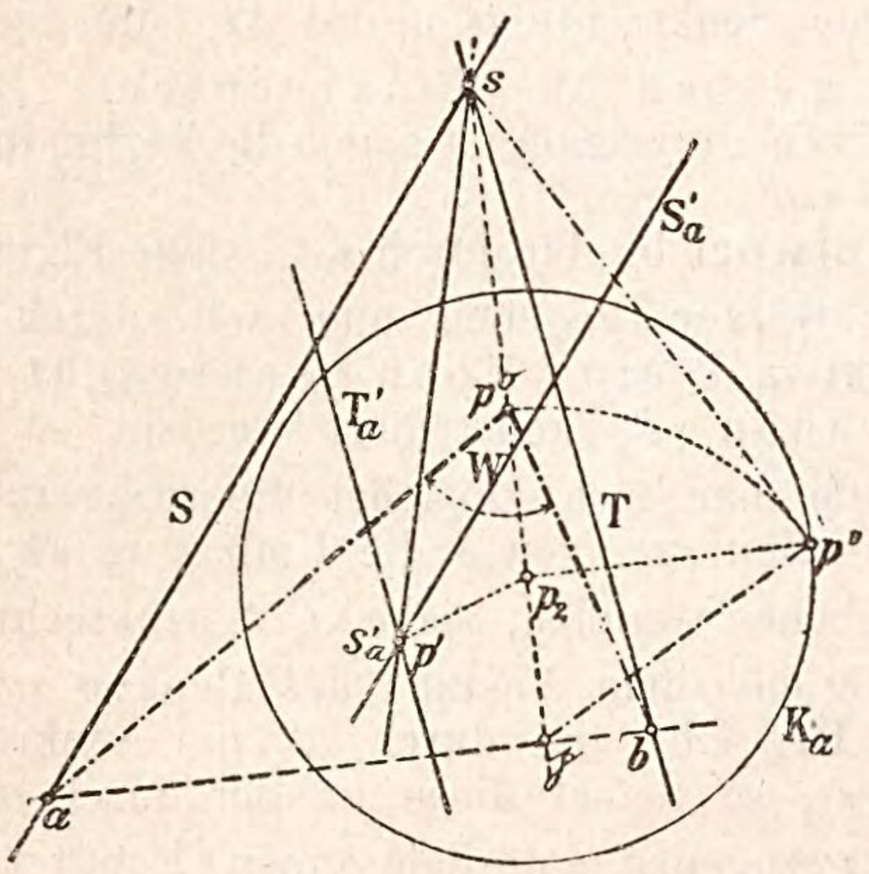
Ist nun, siehe Figur 22, SS'_a die Ebene ss'_a die Gerade, so fälle man, siehe Frage und Antwort 15a, durch den Punkt s'_a eine Senkrechte $s_a b$ zur Ebene SS'_a und lege die Ebene dieser Senkrechten und der Geraden ss_a um ihre Spur sb in die **Pr. Eb.** um. Die Umlegungen $s^\circ_a s$ und $s^\circ_a b$ schliessen einen Winkel w ein, dessen Complementswinkel $90^\circ - w$ der gesuchte Winkel ist.

---

h) Winkel zweier Ebenen.

Frage 17. Wie konstruiert man bei der Darstellung in schiefer Projektion den Winkel zweier Ebenen?

Figur 23.



Antwort. Man bestimmt sich die Schnittlinie beider Ebenen und schneidet dieselben durch eine dritte Ebene senkrecht zur genannten Schnittlinie. Die Schnittlinie dieser Ebene mit den gegebenen Ebenen schliessen den gesuchten Winkel ein, siehe auch Frage und Antwort 45, I. Teil.

Sind, siehe Figur 23, SS'_a und TT'_a die gegebenen Ebenen, so ist ss'_a oder sp' ihre Schnittlinie. Legt man nun etwa gleich durch p eine Ebene senkrecht zur Schnittlinie ps, so geht deren Spur senkrecht zu $p_2 s$ durch $\mathfrak{p}$ und schneidet die Spuren S und T in den Punkten a und b. Die Umlegung der Ebene apb liefert das Dreieck $ap^\circ b$, das bei p° den Winkel W beider Ebenen in wahrer Grösse enthält.

Man konstruiere den Winkel der beiden Ebenen nach dem in Frage und Antwort 45, I. Teil, unter b angegebenen Verfahren.

Anmerkung 4. Mit Hilfe des Vorangegangenen ist man nun im stande sämtliche Aufgaben, in welchen es sich um die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen handelt, auch bei der Darstellung in schiefer Projektion konstruktiv zu lösen, wobei man stets von der Affinitätsbeziehung, welche zwischen rechtw. und schiefer Projektion eines ebenen Gebildes besteht, Gebrauch machen wird.

Ungelöste Aufgaben.

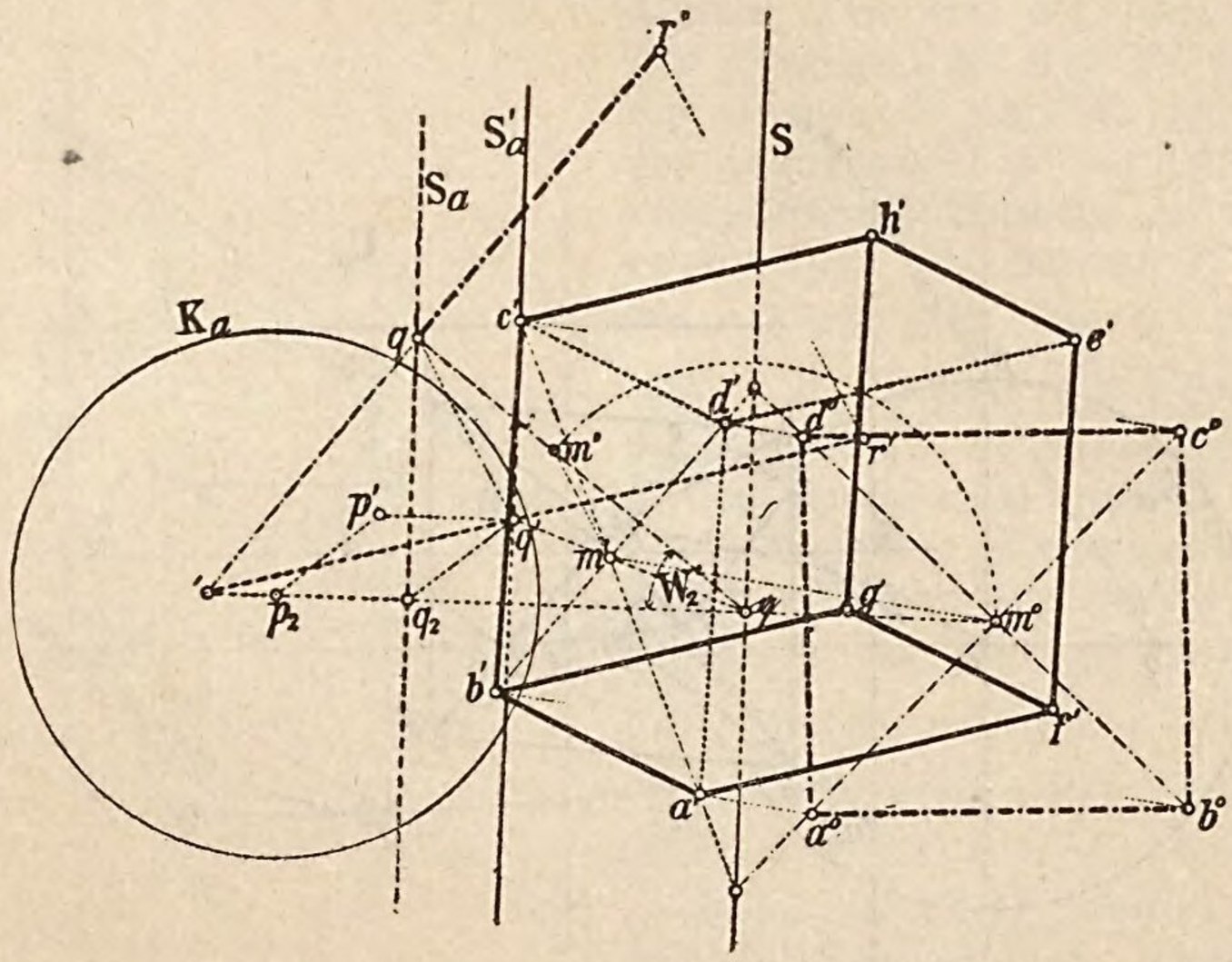
Aufgabe 12. Man führe die Aufgaben 13 bis 30, ebenso 33 bis 44, desgleichen 46 bis 61, siehe I. Teil, in schiefer Projektion durch.

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. In einer durch ihre Spuren S und S'_a, siehe Figur 24, gegebenen Ebene liegt ein Quadrat von gegebener Seitenlänge als Grundfläche eines Würfels. Man soll die schiefe Projektion des Würfels darstellen.

Auflösung. Zeichne, etwa gleich durch p_2, die Senkrechte $p_2 q$ zu S, bestimme S_a (mittels des Parallelogrammes $p_2\, p'\, q'\, q_2$), sowie das Konstruktionsdreieck $\mathrm{q}\, q_2\, q$ des Punktes q. Nimmt man nun auf $\mathrm{q}\, q'$ den Punkt m' als schiefe Projektion des Quadratmittelpunktes beliebig an, zieht $m' m''$ parallel $q' q$ und

Figur 24.



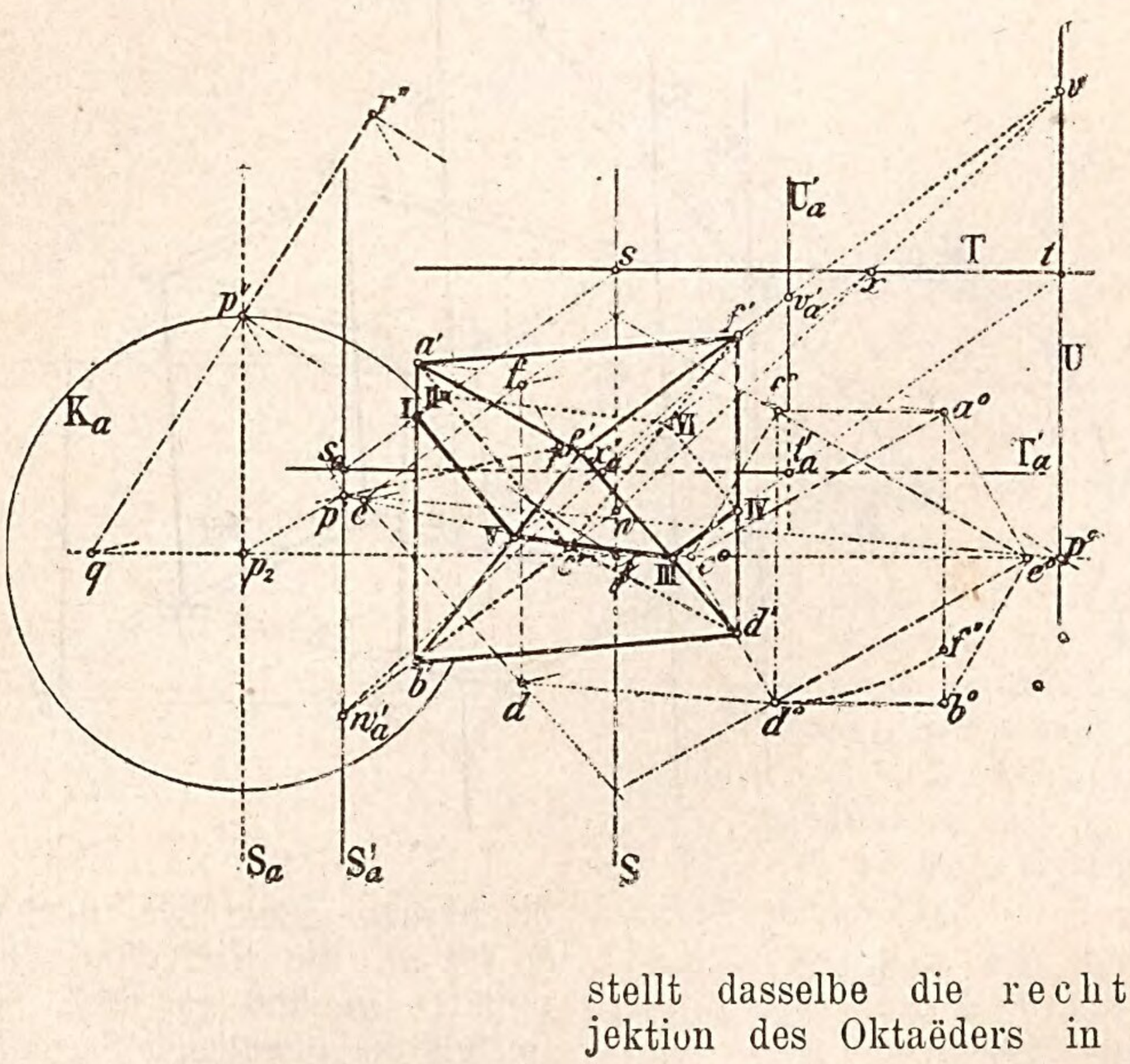
macht $\mathrm{q}\, m^0$ senkrecht zu S und gleich $\mathrm{q}\, m''$, so ist m^0 die Umlegung des Qnadratmittelpunktes m und es lässt sich nun um m^0 mittels der gegebenen Seitenlänge das Quadrat $a^0 b^0 c^0 d^0$ in beliebiger Lage zeichnen und dessen schiefe Projektion $a' b' c' d'$ als affine Figur zu $a^0 b^0 c^0 d^0$ mit S als Affinitätsachse und $m^0 m'$ als Affinitätsrichtung bestimmen. Macht man ferner $q r^0$ senkrecht zu $\mathrm{q}\, q$ und gleich der Würfelkantenlänge $\overline{a^0 b^0}$, ermittelt $q' r'$ als schiefe Projektion der Senkrechten $q r$ zur Ebene $S S'_a$, so braucht man nur durch die Punkte a', b',

c', d' Parallele zu $q'r'$ zu ziehen und auf denselben die Strecke $\overline{q'r'}$ abzutragen, um die noch fehlenden vier Würfelecken f', g', h', e' in schiefer Projektion zu erhalten.

Aufgabe 14. Eine durch ihre Spuren S und S'_a gegebene Ebene ist Seitenfläche eines regulären Oktaëders von gegebener Kantenlänge. Man soll die schiefe Projektion des Oktaëders zeichnen und denselben durch eine durch ihre Spuren T und T'_a gegebene Ebene schneiden.

Auflösung. Im vorliegenden Fall ist der Einfachheit halber der Punkt p' auf S'_a angenommen worden, es geht daher die rechtw. Projektion S_a durch p_2. Das Konstruktionsdreieck des Punktes p ist das Dreieck $p_2 p p''$ und die Umlegung von p gelangt nach p^0. Zeichnet man nun das Sechseck $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0 f_0$ mit der Oktaëderkantenlänge als Seite, so

Figur 25.



stellt dasselbe die rechtwinklige Projektion des Oktaëders in die Ebene SS'_a nach deren Umlegung in die **Pr. Eb.** dar. Setzt man das Dreieck abc in der Ebene SS'_a liegend voraus, so entspricht demselben als schiefe Projektion das Dreieck $a'b'c'$. Nimmt man ferner zunächst auch das Dreieck def in der Ebene SS'_a liegend an, so entspricht demselben als schiefe Projektion das Dreieck def, und man hat jetzt nur in den Punkten d, e und f Senkrechte zur Ebene SS'_a zu er-

richten und auf denselben je eine Länge abzutragen gleich der Entfernung der Eckpunkte d bis f von der Ebene SS'_a. Die wahre Grösse dieser Entfernung ist gleich der Strecke $\overline{a^0 f^0}$ ermittelt worden.

Zeichnet man nun etwa gleich im Punkte p eine Senkrechte zur Ebene, so ist deren Umlegung $p'' r''$ senkrecht zu p'' p und gleich $\overline{a^0 f^0}$; ihr entspricht als schiefe Projektion die Strecke $\overline{p' r'}$, zu welcher Linie durch d, e und f Parallele zu ziehen, und die Strecken $\overline{d d'}$, $\overline{e e'}$, $\overline{f f'} = \overline{q' r'}$ abzutragen sind. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Punkten a', b' und c' vervollständigen die schiefe Projektion des Körpers.

Was nun die Ermittelung des Schnittes mit der Ebene TT'_a anbelangt, so bestimmt man zweckmässig die Schnittlinien der Oktaëderflächen bezw. deren Diagonalflächen mit der Ebene TT'_a.

Die Ebenen SS'_a und TT'_a schneiden sich nach der Linie ss'_a und diese liefert auf den Kanten $a'b'$ und $a'c'$ die Punkte I und II. Die Parallelebene def zu abc hat als Spur die Gerade U parallel zu S gehend durch den Schnittpunkt p^0 der im Punkte r'' zu qr'' errichteten Senkrechten mit der **Pr. Eb.** Die zweite Spur U'_a ist von U ebenso weit abstehend wie SS'_a von S. Die Ebenen UU'_a und TT'_a liefern die Schnittlinie tt'_a und diese trifft die Oktaëderkanten $d'e'$ und $d'f'$ in den Punkten III und IV. Endlich ist noch der Schnitt der Diagonalebene $bcfe$ mit der Ebene TT'_a zu bestimmen. Nun liegen die Spuren w und w'_a von bc auf S bezw. S'_a, die von $e'f'$, nämlich v und v'_a auf U und U'_a, daher erhält man in den Verbindungslinien vw und $v'_a w'_a$ die Spuren der Diagonalebene $bcfe$, welche die Ebene TT'_v nach der Geraden xx'_a schneidet, die ihrerseits auf $b'f'$ und $c'f'$ noch zwei Schnittpunkte V und VI ergibt.

Die Durchschnittsfigur der Ebene TT'_a mit dem Oktaëder ist somit das Sechseck I, II, III, IV, V, VI.

3) Ueber die schiefe Projektion mit zu Grundelegung der Pr. Ebn. E_1, E_2 und E_3.

A) Ueber die Darstellung eines Punktes.

Frage 18. Wie wird bei der unter 3 genannten Projektionsmethode ein Punkt in schiefer Projektion dargestellt?

Erkl. 13. Mit Bezugnahme auf die Antw. 65, I. Teil, kann man den Punkt a'_1, siehe Figur 27, auch die schiefe Projektion der ersten Projektion oder des Grundrisses, a_2 die schiefe Projektion der zweiten Projektion oder des Aufrisses, endlich a_3 die schiefe Projektion der dritten Projektion oder des Kreuzrisses des Punktes a nennen. Für die Folge sollen stets die Bezeichnungen schiefe Projektion des Grundrisses, Aufrisses und Kreuzrisses gebraucht werden.

Erkl. 14. Da die **Pr. Eb.** für die schiefe Projektion mit der **Pr. Eb.** E_2 sich deckt, so fällt auch die schiefe Projektion des Aufrisses einer Raumgrösse stets mit ihrer rechtw. Projektion auf die **Pr. Eb.** E_2, d. h. mit ihrem Aufrisse zusammen.

Erkl. 15. Zur Festlegung der Projektionsrichtung für die schiefe Projektion genügt es, die drei Coordinatenachsen, siehe Erkl. 183, I. Teil, X, Z und Y, letztere als schiefe Projektion der Achse Y, und ausserdem entweder

a) schiefe Projektion eines Punktes und seines Grundrisses,
b) schiefe Projektion eines Punktes und seines Aufrisses,
c) schiefe Projektion eines Punktes und seines Kreuzrisses

zu geben. Zweckmässig ist es, die Angabe unter b als bekannt vorauszusetzen, was auch in der Folge stets geschehen ist.

Erkl. 16. Mit Bezug auf die Erkl. 13 bis 15 lässt sich die Antwort der Frage 18 in folgendem Satze zusammentreffen:

„Ein Punkt wird dargestellt durch seine schiefe Projektion und die schiefe Projektion seines Grundrisses, bezw. seines Auf- oder Kreuzrisses“

Erkl. 17. Was die Grösse des Winkels w' anbelangt, so ist dieselbe ganz willkürlich, ebenso die Neigung η der Y'-Achse, siehe Figur 26, zur X-Achse. Zweckmässig ist es, mit Rücksicht auf die Konstruktion der Zeicheninstrumente (Dreiecke) den Winkel η zwischen Y' und X-Achse gleich 30^0 und das Verhältnis der Katheten des Konstruktionsdreiecks eines Punktes gleich 1 : 2 zu wählen. Unter dieser Voraussetzung erhält man für den Winkel w' die Beziehung

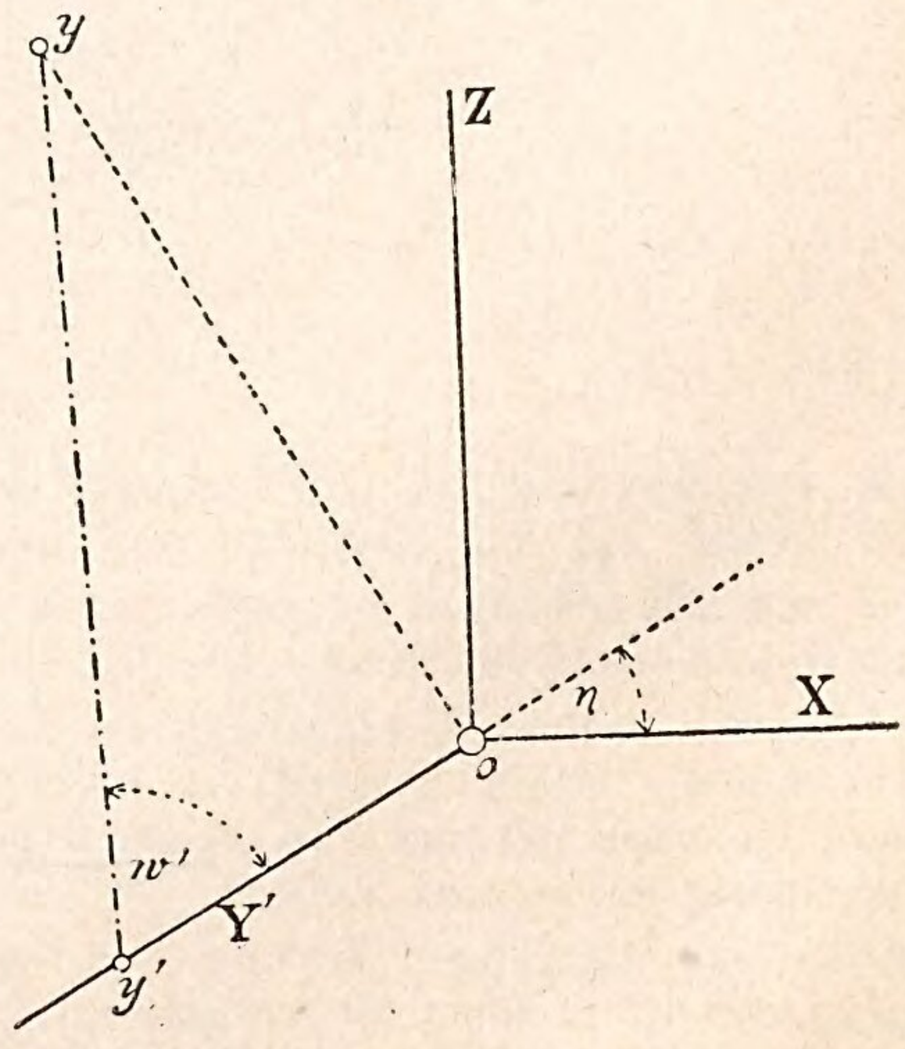
$$tg\, w' = \frac{\overline{o\,Y}}{\overline{o\,Y'}} = 2 \text{ oder } w' = 63^0\ 26' \ldots 2)$$

Antwort. Denkt man sich die drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 in einer beliebigen Richtung und unter einem willkürlichen Winkel w' in die **Pr. Eb.** E_2 projiziert, so entsteht die Figur 27 unter der Voraussetzung einer bestimmten Abgrenzung der **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3. Sind dabei a_1, a_2 und a_3 die rechtw. Projektionen eines Punktes a im Raume, so erhält man in a'_1, a_2 und a'_3 die schiefen Projektionen der Punkte a_1, a_2 und a_3, in a' aber die schiefe Projektion des Punktes a selbst. Hiebei ist vorausgesetzt, dass die Verbindungslinien $a'a'_3$, $a'a_2$ und $a'a'_1$ parallel laufen zu den drei Linien X, Y' und Z, den Schnittlinien der drei **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3.

Zeichnet man das rechtw. Dreieck $a'a_2a$, so dass $\overline{a_2a} = \overline{a_x a_1}$ gleich dem Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** E_2 ist, so enthält dasselbe bei a' den Winkel w' der schief Projizierenden durch a mit der **Pr. Eb.** Das Dreieck $a'a_2a$ ist das Projektionsdreieck, siehe Erkl. 7, des Punktes a.

Zur Festlegung der Lage eines Punktes im Raume genügt nun offenbar die Angabe der Lage eines der Punktpaare $a'a_2$, $a'a'_1$, $a'a'_3$, sowie der Grösse des Winkels w'.

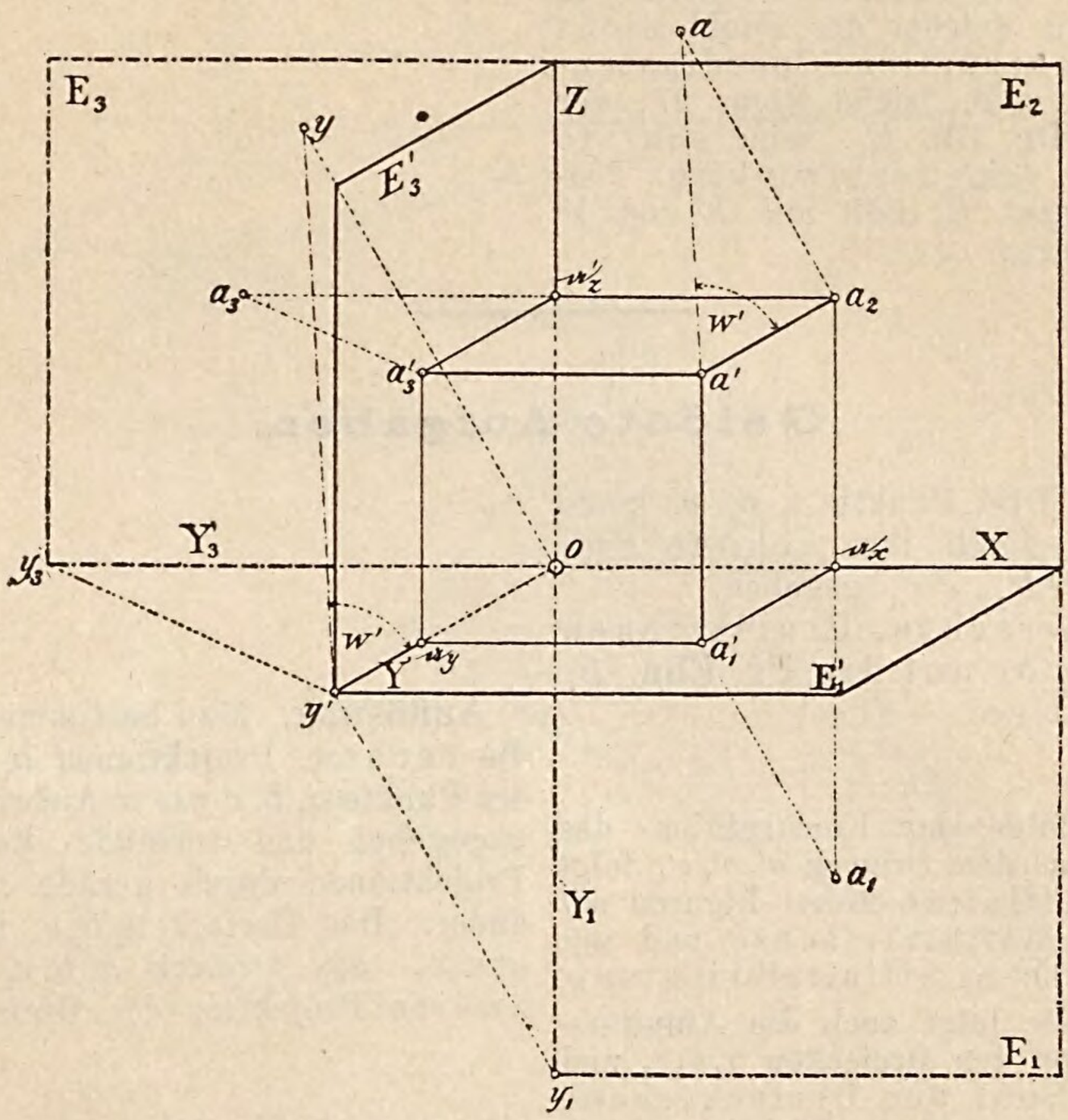
Figur 26.



Frage 19. Wie bestimmt man für einen durch die schiefen Projektionen a' und a'_1 gegebenen Punkt a seine rechtwinkligen Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 und damit auch seine Abstände von diesen **Pr. Ebn.**?

Antwort. Kennt man, siehe Figur 27, von einem Punkte a im Raume seine schiefe Projektion a', sowie die schiefe Projektion a'_1 seines Grundrisses, so lassen sich seine rechtwinkligen Projektionen a_1, a_2 und a_3 einfach wie folgt ermitteln. Man ver-

Figur 27.



vollständigt das Parallelogramm $a'\,a'_1\,\mathfrak{a}_x\,a_2$ und erhält hiedurch a_2. Mit Rücksicht auf die Grösse des Winkels w', siehe Erkl. 17, ergibt sich nun unmittelbar die erste Projektion a_1 oder der Grundriss a_1 von a durch Abtragen der Strecke $\overline{\mathfrak{a}_x a_1} = 2\overline{a_2 a'}$ von $\mathfrak{a}_x$ aus auf der verlängerten Linie $a_2\,\mathfrak{a}_x$. Kennt man aber a_1 und a_2, so ist damit auch a_3 gegeben, denn es ist ja $\overline{\mathfrak{a}_z a_3} = \overline{\mathfrak{a}_x a_1}$.

Da ferner der Winkel $a_1\,\mathfrak{a}\,a_1 = 60^\circ$ beträgt, so steht die Verbindungslinie $a_1 a'_1$ senkrecht zu $a'_1\,\mathfrak{a}_x$, wodurch sich gleichfalls der Punkt a_1 durch Ziehen einer Senkrechten durch a'_1 zu Y' direkt konstruieren lässt.

Erkl. 18. Will man lediglich die Abstände des Punktes a von den **Pr. Ebn.** ermitteln, so ist hiezu die Kenntnis der rechtw. Projektionen von a nicht erforderlich; denn zieht man durch a'_1 die Parallelen zu X und Y', so gibt die Länge $\overline{a' a'_1}$ den ersten, die Länge $\overline{2a_1\,\mathfrak{a}_x}$ den zweiten, endlich die Länge $\overline{a'_1\,\mathfrak{a}_y}$ den dritten Abstand des Punktes a an.

Erkl. 19. Aus dem in der Antwort der Frage 19 und Erkl. 18 Gesagten folgt, dass die Lage eines Punktes a im Raume vollständig

bestimmt ist, sobald man seine schiefe Projektion a' und die schiefe Projektion a'_1, a_2 oder a'_3 einer seiner drei rechtw. Projektionen a_1, a_2, a_3 kennt, sowie dass sich letztere aus ersteren konstruieren lassen. Dabei haben die Punktpaare $a'a'_1$, $a'a_2$, $a'a'_3$ nur der Bedingung zu genügen, dass die Verbindungslinien $a'a'_1$, $a'a_2$, $a'a'_3$ bezw. parallel zu den Achsen Z, Y' und X gerichtet sind.]

Erkl. 20. Liegt ein Punkt in einer der **Pr. Eb.**, so fällt seine schiefe Projektion mit der schiefen Projektion seines Auf-, Grund- oder Kreuzrisses zusammen, je nachdem der Punkt in der **Pr. Eb.** E_2, E_1 oder E_3 sich befindet. Die rechtw. Projektion in jene **Pr. Eb.**, in welcher der Punkt nicht liegt, fällt in die bezügliche Coordinatenachse. So liegt z. B., siehe Figur 27, der Punkt a_1 in der **Pr. Eb.** E_1, seine schiefe Projektion ist a'_1, seine rechtwinklige Projektion auf E_2 bezw. E_3 fällt auf X und Y' nach a_x und a_y bezw.

Wäre der Punkt a durch a_2 und a' oder a'_3 und a' gegeben, so liessen sich gleichfalls in einfacher Weise die rechtwinkligen Projektionen a_1, a_2 und a_3 konstruieren. Wie?

Nunmehr kennt man aber auch die Abstände des Punktes a von den **Pr. Ebn.**, denn es ist $\overline{a_x a_2}$ gleich dem ersten, die Strecke $\overline{a_x a_1}$ gleich dem zweiten Abstand des Punktes a.

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 15. Drei Punkte a, b, c, siehe Figur 28, sind durch ihre schiefe Projektionen $a'a'_1$, $b'b'_1$, $c'c'_1$ gegeben.

Man soll die rechtw. Projektionen des Dreiecks abc auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 darstellen.

Auflösung. Man bestimme, siehe Figur 28, die rechtw. Projektionen a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 der Punkte a, b, c wie in Antwort der Frage 19 angegeben und verbinde die gleichnamigen Projektionen durch gerade Linien mit einander. Das Dreieck $a_1b_1c_1$ ist die rechtw. erste, das Dreieck $a_2b_2c_2$ die rechtw. zweite Projektion des Dreiecks abc.

Erkl. 21. Zufolge der Konstruktion des Dreiecks $a_1b_1c_1$ aus dem Dreieck $a'_1b'_1c'_1$ folgt unmittelbar die Affinität dieser Figuren mit der X-Achse als Affinitätsachse und der Senkrechten zu Y' als Affinitatsrichtung.

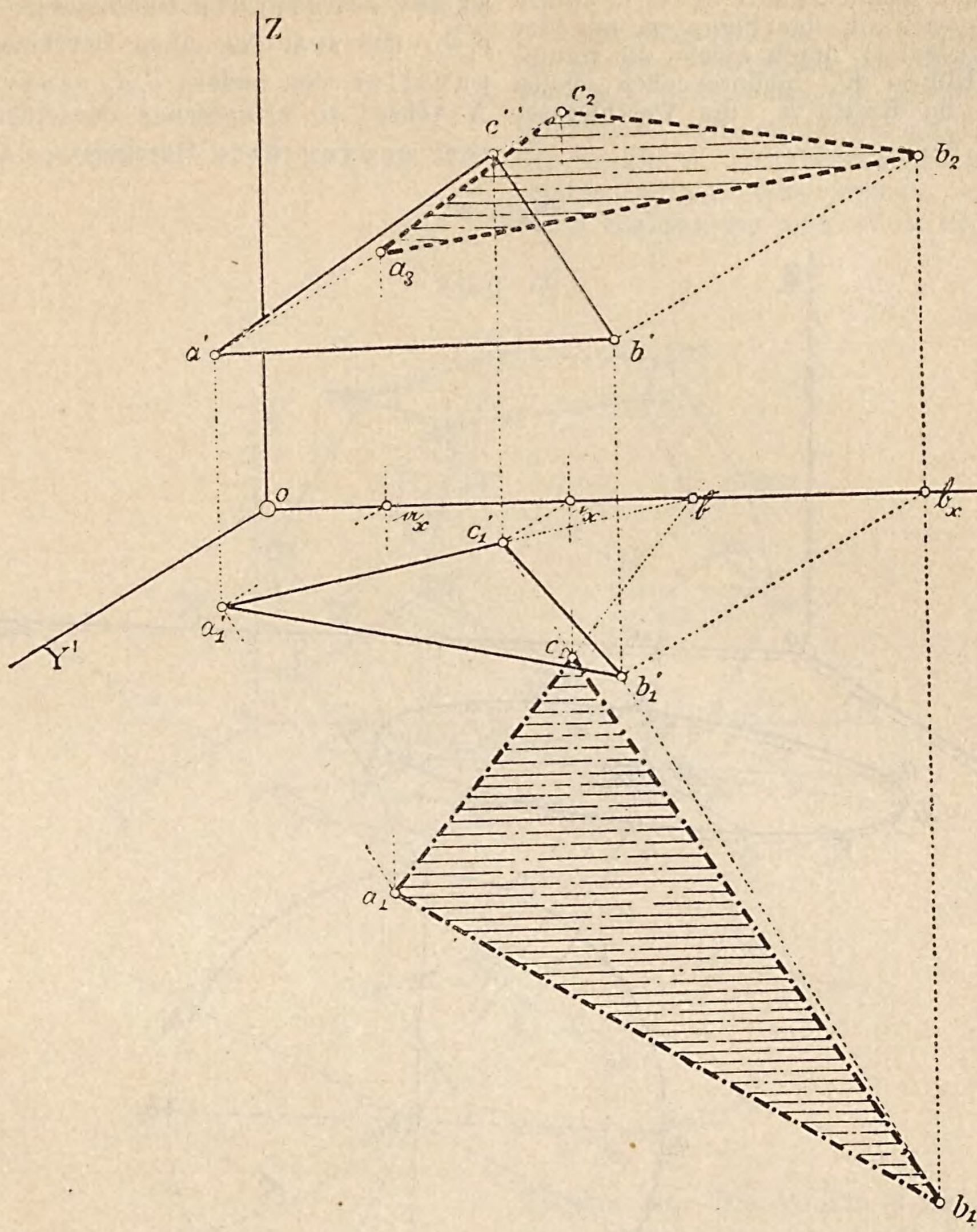
In gleicher Weise folgt auch die Affinitätsbeziehung zwischen den Dreiecken $a_2b_2c_2$ und $a'_1b'_1c'_1$ mit der Spur der Dreiecksebene als Affinitätsachse und der Richtung Y' als Affinitätsrichtung; endlich ist aber auch noch die Affinitätsbeziehung zwischen den beiden schiefen Projektionen $a'b'c'$ und $a'_1b'_1c'_1$ zu entnehmen, mit der schiefen Projektion der ersten Spur der Dreiecksebene als Affinitätsachse und der Richtung Z als Affinitätsrichtung.

Das eben Gesagte lässt sich kurz in die folgenden Sätze zusammenfassen:

„Die **schiefe** Projektion des **Grund-** und **Kreuzrisses** einer ebenen Figur ist stets **affin** zur gleichnamigen **rechtw.** Projektion der betreffenden Figur mit der X- bezw. Y'-Achse als Affinitätsachse."

„Die schiefe Projektion einer ebenen Figur ist affin zur schiefen Projektion ihres **Grund-**, **Auf-** oder **Kreuzrisses;** dabei ist die Affinitätsrichtung pa-

Figur 28.



rallel zur Z-, Y'- oder X-Achse; die Affinitätsachse fällt zusammen mit der schiefen Projektion der Spur der Ebene der Figur mit der bezüglichen **Pr. Eb.**

Aufgabe 16. Man soll die schiefe Projektion eines in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden Kreises zeichnen, wenn die schiefe Projektion m'_1, siehe Figur 29, seines Mittelpunktes m, sowie der Kreishalbmesser gegeben sind.

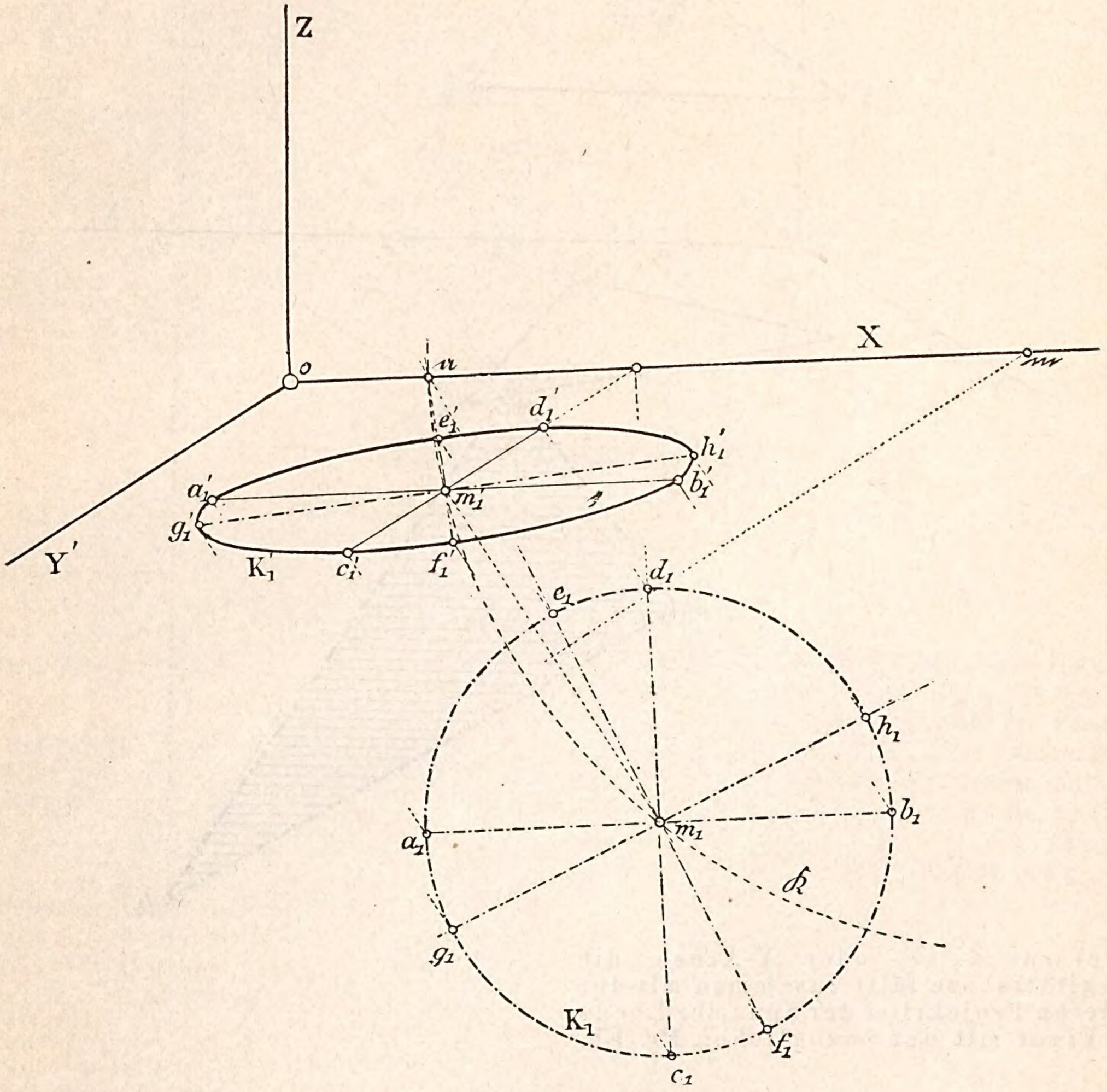
Erkl. 22. Will man sich die Hauptachsen der Ellipse K'_1 verschaffen, so kann dies unmittelbar geschehen durch Beschreibung eines Kreises $\mathfrak{K}$ um den Schnittpunkt m der Halbier-

Auflösung. Man bestimme, siehe Figur 29, die rechtw. Projektion m_1 von m, zeichne um m_1 als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser den Kreis K_1 und ermittle dessen affine Figur K'_1 mit X als Affinitätsachse und $m_1 m'_1$ als Affinitätsrichtung

senkrechten über $\overline{m'_1 m_1}$ mit der X-Achse. Dieselbe schneidet nämlich die X-Achse in zweien Punkten a und b (in der Figur ist nur der Punkt a angedeutet), durch welche die Hauptachse der Ellipse K'_1 hindurchgehen; ihnen entsprechen im Kreise K_1 die Durchmesser $\overline{e'_1 f'_1}$ und $\overline{g'_1 h'_1}$.

Wählt man im Kreise K_1 zwei zu einander senkrechte Durchmesser $\overline{a_1 b_1}$ und $\overline{c_1 d_1}$, und zwar den einen Durchmesser $\overline{a_1 b_1}$ parallel, den andern $\overline{c_1 d_1}$ senkrecht zur X-Achse, so entsprechen denselben in K'_1 zwei conjugierte Durchmesser $\overline{a'_1 b'_1}$ und

Figur 29.



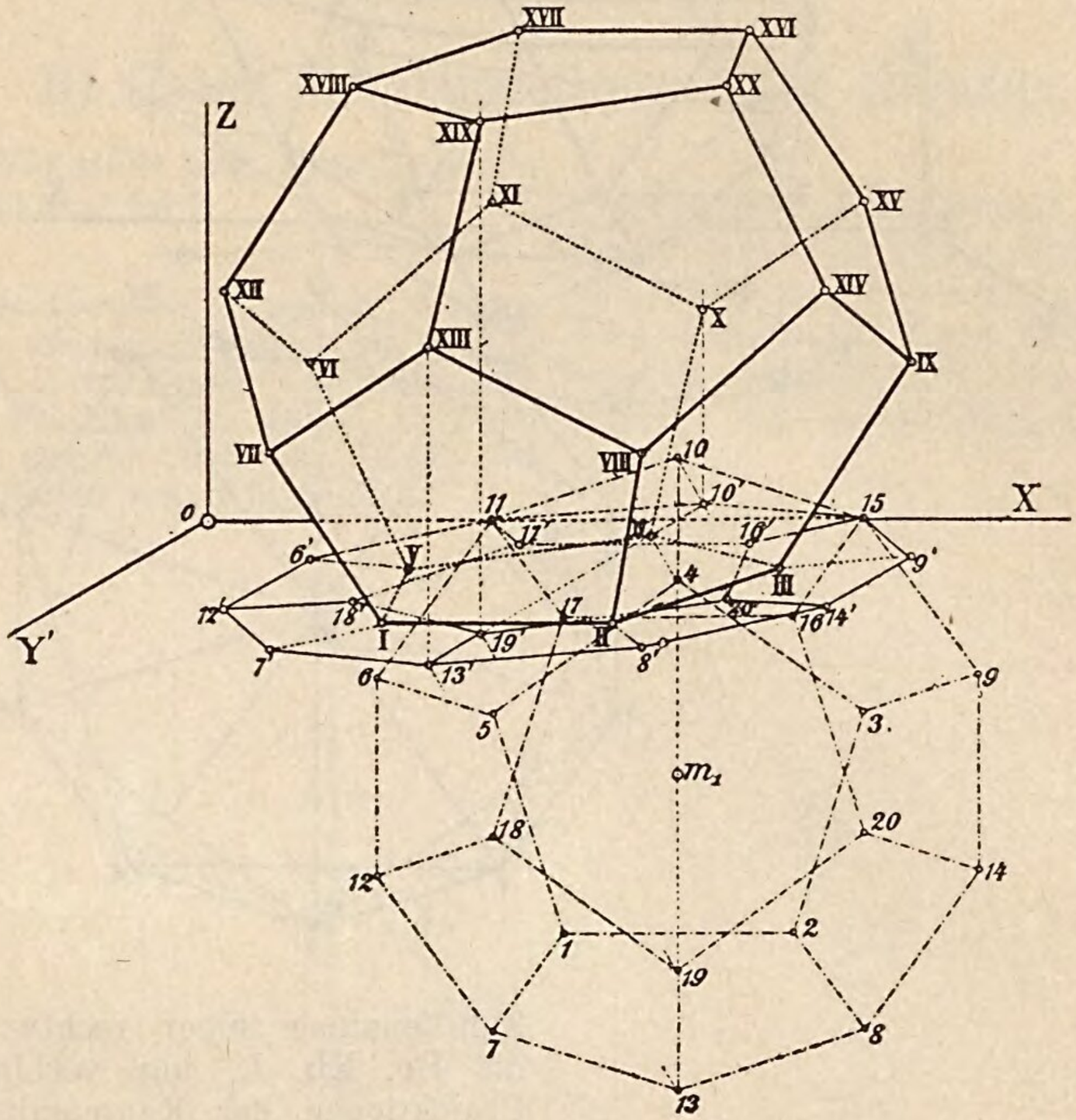
$\overline{c'_1 d'_1}$, von denen $\overline{a'_1 b'_1}$ parallel zur X-, der andere $\overline{c'_1 d'_1}$ parallel zur Y'-Achse läuft und deren Endpunkte in den Senkrechten a_1, b_1, c_1 und d_1 zur Y'-Achse sich befinden. Mittels der beiden conjugierten Durchmesser lässt sich die Ellipse, siehe die Antworten der Fragen 54 und 55, I. Teil, konstruieren.

Aufgabe 17. Man zeichne ein reguläres Dodekaëder von gegebener

Kantenlänge, wenn dasselbe mit einer Seitenfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegen soll.

Auflösung. Zeichne, siehe Figur 30, zunächst die rechtw. Projektion des Körpers in der **Pr. Eb.** E_1 und aus dieser die schiefe Grundrissprojektion. Soll nun die Seitenfläche **1** bis **5** in der **Pr. Eb.** E_1 sich befinden, so gehören die schiefen Grundrissprojektionen der Punkte **1** bis **5** zugleich der schiefen Projektion des

Figur. 30

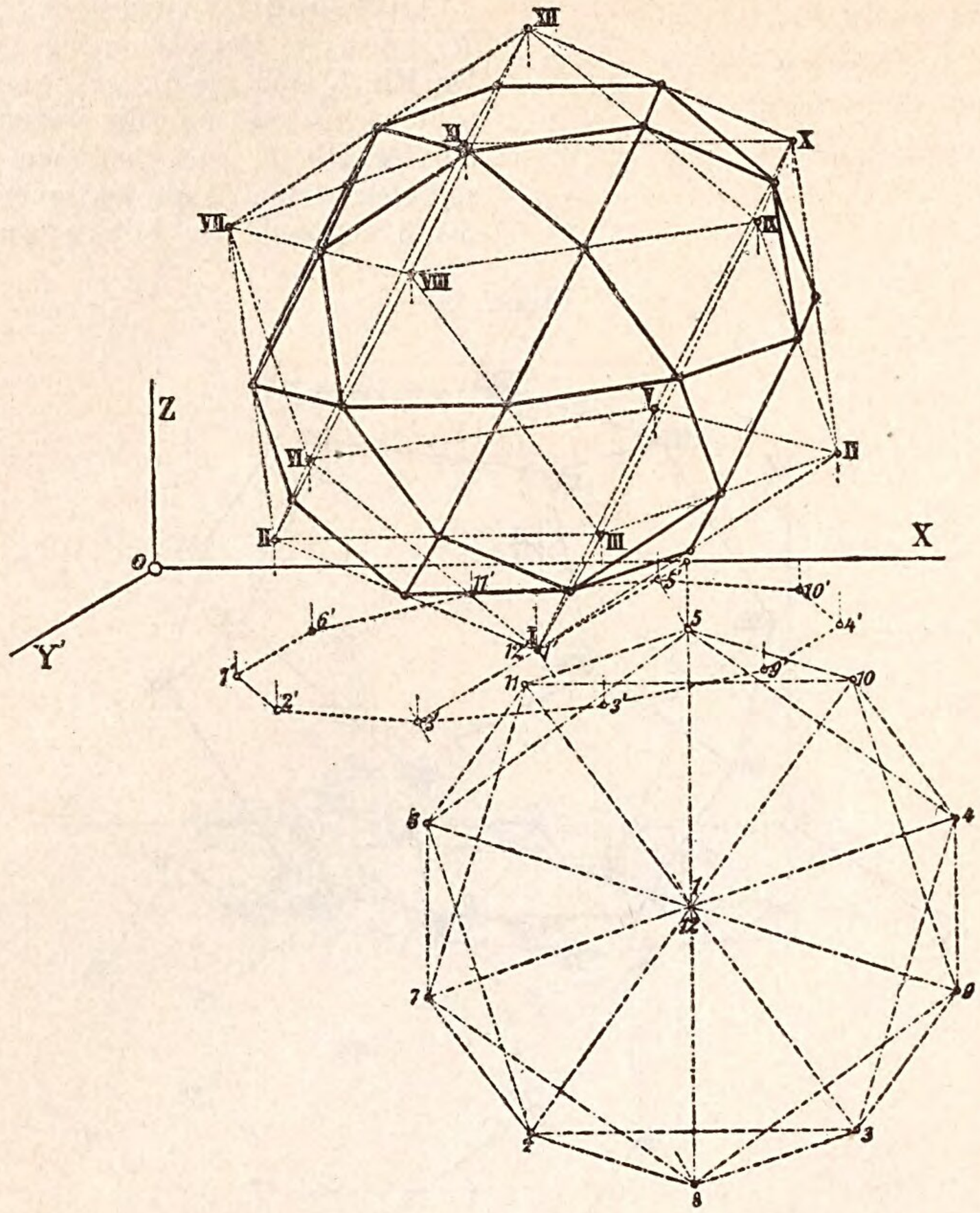


Körpers an. Die Punkte **6** bis **10** besitzen einen ersten Abstand gleich $r = \overline{m_1 1}$, die Punkte **11** bis **15** einen solchen gleich $R = \overline{m_1 6}$, endlich die Punkte **16** bis **20** einen Abstand gleich $R + r$. Man hat also nur durch die Punkte **6** bis **20** der schiefen Grundrissprojektion Parallele zur Z-Achse zu ziehen und auf ihnen die diesbezüglichen Abstände aufzutragen, siehe auch Antwort der Frage 40, sowie Anmerkung 23, II. Teil.

Aufgabe 18. Man zeichne den von 20 Dreiecken und 12 Fünfecken begrenzten archimedischen Körper als Ableitung aus dem regulären Ikosaëder, wenn letzteres mit einer Ecke in der **Pr. Eb.** E_1 liegt und eine Hauptdiagonale parallel zur Z-Achse läuft.

Auflösung. Zeichne zunächst, siehe Figur 31, die schiefe Projektion des Ikosaëders mit

Figur 31.



Zuhilfenahme seiner rechtw. Projektion auf die **Pr. Eb.** E_1 und verbinde die schiefen Projektionen der Kantenmittelpunkte, siehe auch Erkl. 109 und 110, II. Teil.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 19. Man löse die Aufgabe 16 für den Fall der Kreis K in der **Pr. Eb.** E_3 liegen soll.

Aufgabe 20. Die schiefe Projektion a'_1 eines in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden Punktes a ist als Ecke eines Quadrates von bekannter Seitenlänge gegeben. Es soll das Quadrat so gezeichnet werden, dass auch seine schiefe Projektion ein Quadrat werde.

Aufgabe 20a. Man zeichne die schiefe Projektion eines Würfels, der das in Aufgabe 20 genannte Quadrat als Grundfläche besitzt.

Aufgabe 21. Man zeichne die übrigen regulären und halbregulären Körper in schiefer Projektion bei gegebener Kantenlänge und bestimmter Stellung gegen die **Pr. Ebn.**

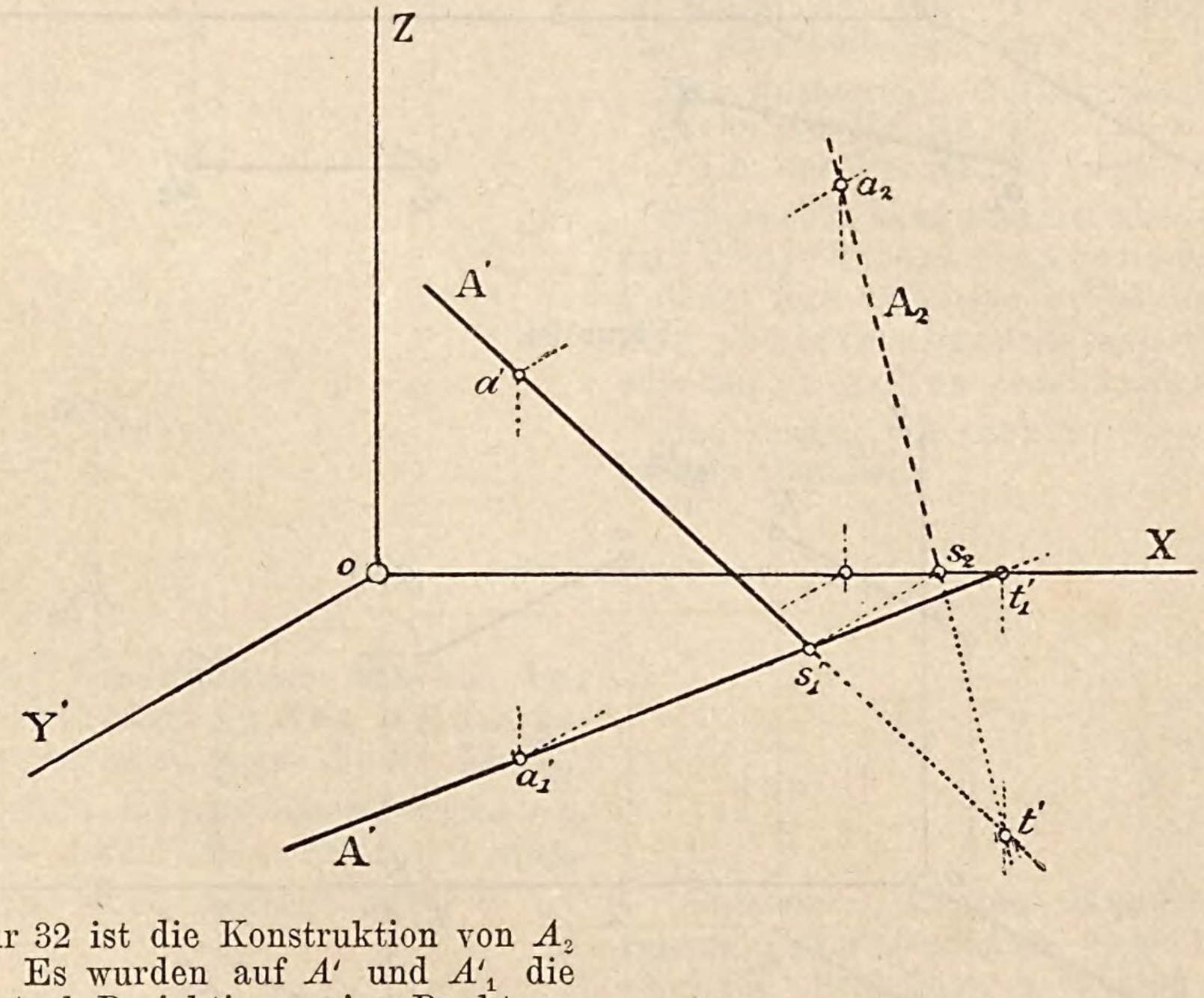
B) Ueber die Darstellung einer Geraden.

Frage 20. Wie stellt man eine Gerade in schiefer Projektion dar?

Antwort. Eine Gerade wird dargestellt durch ihre schiefe Projektion und die schiefe Projektion von Grund- Auf- oder Kreuzriss. In Figur 32 ist die Gerade A gegeben durch die schiefen Projektionen A' und A'_1 von A und ihres Grundrisses A_1.

Erkl. 23. Die Geraden A' und A'_1 können ganz willkürlich gewählt werden, sie stellen stets eine Gerade A im Raume von bestimmter Lage gegen die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dar, und es lassen sich aus A' und A'_1 leicht die rechtw. Projektionen von A herstellen.

Figur 32.



In der Figur 32 ist die Konstruktion von A_2 durchgeführt. Es wurden auf A' und A'_1 die Punkte a' und a'_1 als Projektionen eines Punktes a von A angenommen, aus welchen sich die rechtw. Projektion a_2 bestimmt; als zweiten Punkt benützt man den Schnittpunkt s'_1 von A' und A'_1, dem als rechtwinklige Projektion der Punkt s_2 auf X zugehört. Die Verbindungslinie $a_2 s_2$ gibt somit die rechtw. Projektion A_2 von A.

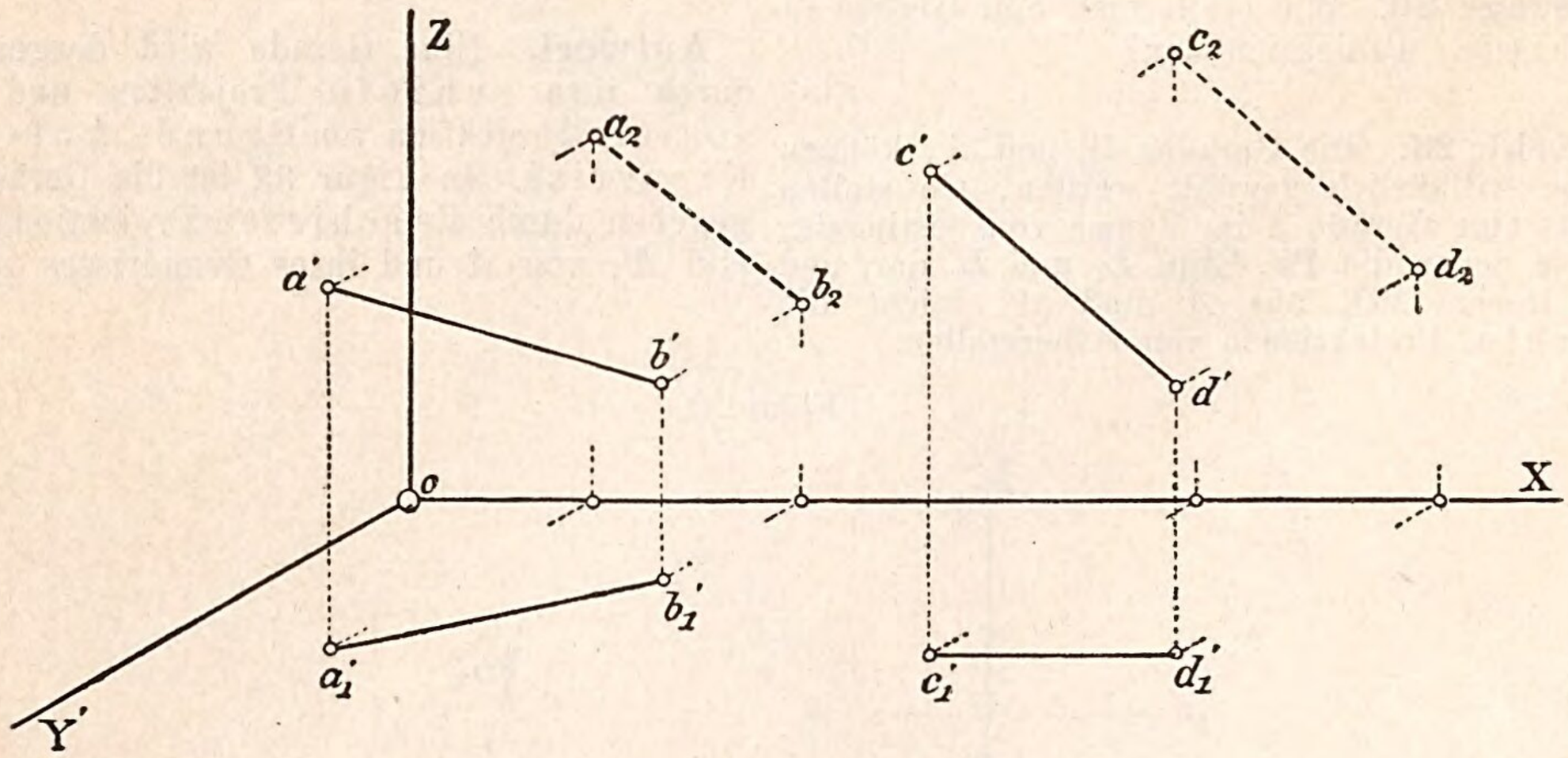
Man bestimme die rechtw. Projektion A_1 von A.

Erkl. 24. Der Punkt s'_1, siehe Figur 32, stellt die schiefe Projektion der ersten Spur der Geraden A dar; die zweite Spur, d. h. der Durchschnittspunkt von A mit der **Pr. Eb.** E_2 ist durch $t' \iota'_1$ gegeben, wobei ι'_1 im Schnittpunkt von A'_1 mit der X-Achse liegt. Man zeichne die dritte Spur der Geraden A.

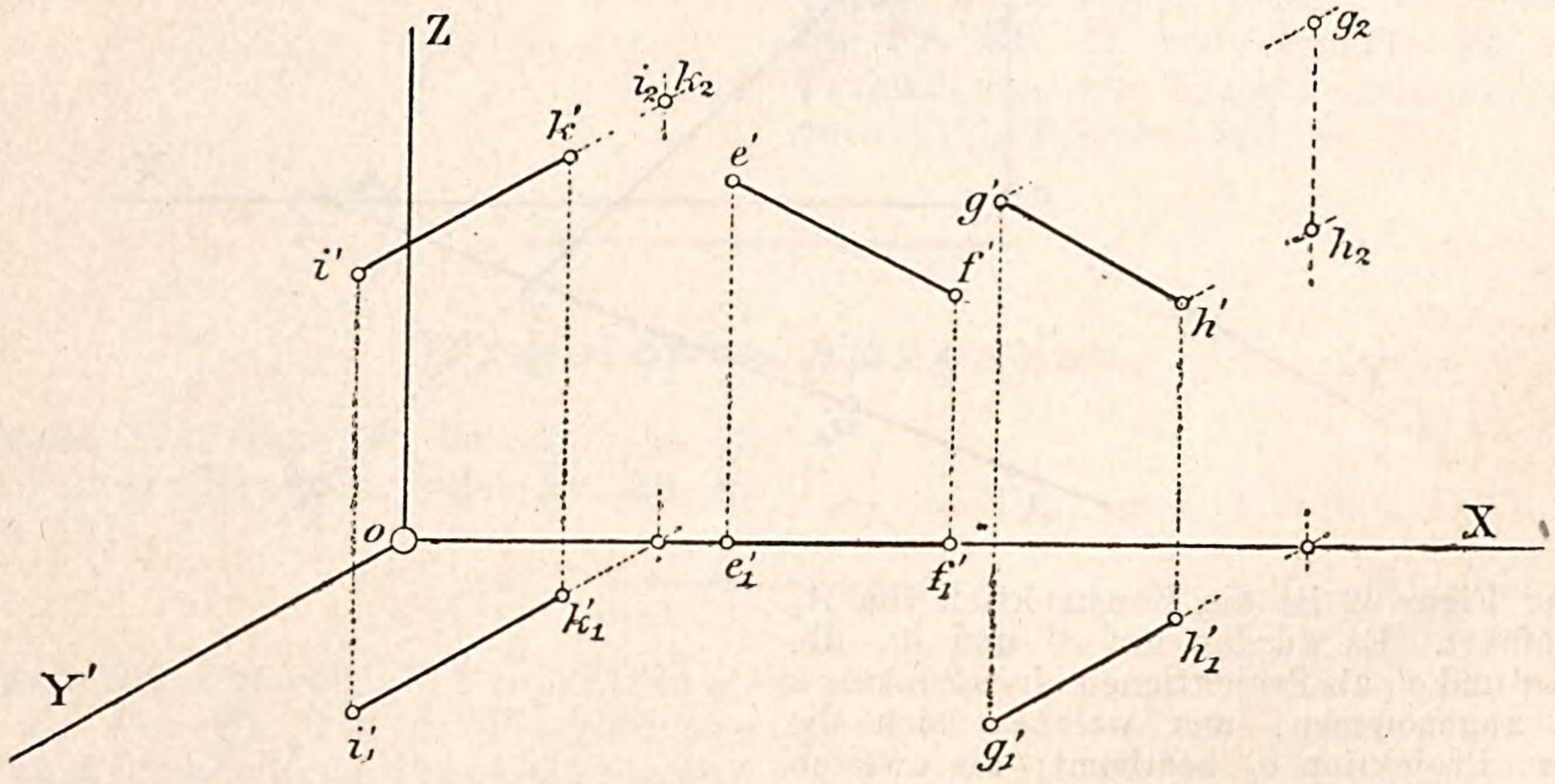
Frage 21. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen einer Geraden gegen die **Pr. Ebn.**?

Antwort. Hat eine Gerade eine allgemeine Lage gegen die **Pr. Ebn.**, so werden auch ihre schiefen Projektionen ganz beliebig zu einander geneigt sein, wie z. B. die Geraden A'_1 und A' der Figur **32** oder die Geraden $a'_1 b'_1$, $a' b'$ der Figur **33**.

Figur 33.



Figur 34.



liebig zu einander geneigt sein, wie z. B. die Geraden A'_1 und A' der Figur **32** oder die Geraden $a'_1 b'_1$, $a' b'$ der Figur **33**.

Ist eine Gerade, z. B. $c\,d$, parallel zu einer **Pr. Eb.**, etwa zur **Pr. Eb.** E_2, so wird

die schiefe Projektion $c'_1 d'_1$ ihres Grundrisses parallel zur X-Achse sein, während die schiefe Projektion $c' d'$ eine ganz beliebige Lage einnehmen kann. Ist eine Gerade parallel zur **Pr. Eb.** E_1, so sind die schiefen Projektionen von Gerade und Grundriss zu einander parallel; eine zur **Pr. Eb.** E_3 parallele Gerade gh hat eine zur Y'-Achse parallele schiefe Grundrissprojektion $g'_1 h'_1$. Die schiefe Projektion $g' h'$ der Geraden selbst liegt beliebig.

Steht die Gerade, z. B. ik, auf einer **Pr. Eb.**, etwa auf E_2 senkrecht, so sind beide Projektionen $i' k'$ und $i'_1 k'_1$ gleichfalls zu einander parallel, letztere Linie ist aber ausserdem noch parallel zu Y'.

Stände eine Gerade zur **Pr. Eb.** E_1 senkrecht, so wäre ihre schiefe Projektion parallel zur Z-Achse, die schiefe Projektion ihres Grundrisses aber ein Punkt.

Welche Lagen haben die schiefen Projektionen einer zur **Pr. Eb.** E_3 senkrechten Geraden?

Liegt eine Gerade, z. B. ef, siehe Figur 34, in einer **Pr. Eb.**, etwa in E_2, so fällt ihre schiefe Grundrissprojektion $e'_1 f'_1$ in die X-Achse, die schiefe Projektion $e' f'$ hat eine ganz beliebige Lage.

Man zeichne eine Gerade, welche
a) in der **Pr. Eb.** E_1,
b) in der **Pr. Eb.** E_3 liegt.

Schliesslich kann eine Gerade noch parallel zur Projektionsrichtung sein; in diesem Fall ist ihre schiefe Projektion ein Punkt, ihre schiefe Grundrissprojektion dagegen eine zur X-Achse senkrechte Gerade.

Man zeichne die rechtw. Projektionen einer solchen Geraden.

Frage 22. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung den Neigungswinkel einer Geraden gegen die **Pr. Eb.** E_2, sowie die wahre Länge einer Strecke $\overline{ab}$, wenn dieselbe durch die schiefen Projektionen $\overline{a' b'}$ und $\overline{a'_1 b'_1}$ gegeben ist?

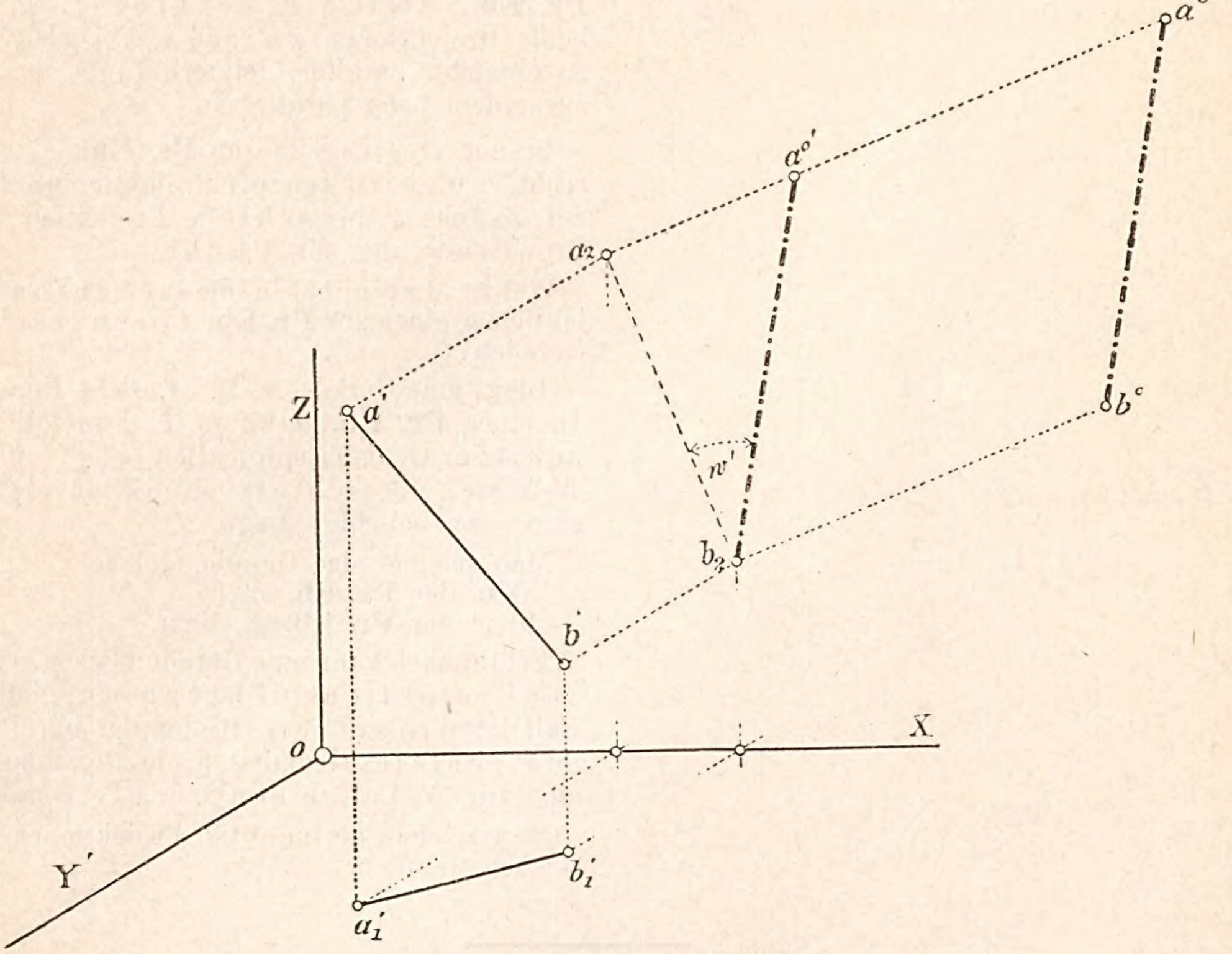
Erkl. 25. Das in nebenstehender Antwort geschilderte erste Konstruktionsverfahren besteht lediglich in der Umlegung des räumlichen Trapezes $ab b_2 a_2$ um die rechtwinklige Projektion $a_2 b_2$ in die **Pr. Eb.** E_2, vergl. auch Frage und Antwort 72, 1, I. Teil.

Antwort. Erstes Konstruktionsverfahren. Man bestimme, siehe Figur 35, die rechtw. Projektion $a_2 b_2$ und zeichne das Trapez $a_2 b_2 b^0 a^0$, so dass $\overline{a_2 a^0}$ und $\overline{b_2 b^0}$ senkrecht zu $\overline{a_2 b_2}$ stehen und bezw. gleich sind den doppelten Strecken $\overline{a' a_2}$ und $\overline{b' b_2}$, so schliesst zunächst die Linie $a^0 b^0$ mit $a_2 b_2$ den Winkel w' der Geraden ab mit der **Pr. Eb.** E_2 ein, während die Strecke $\overline{a^0 b^0}$ die wahre Länge von $\overline{ab}$ angibt.

Zieht man durch b_2 die Parallele $b_2 a^{0\prime}$ zu $b^0 a^0$, so bildet auch diese Linie mit $a_2 b_2$ den Winkel w' und die Strecke $\overline{a^{0\prime} b_2}$ ist gleichfalls gleich der wahren Länge von $\overline{ab}$.

Aus der Figur ist unmittelbar ersichtlich, dass die Kathete $\overline{a_2 a^{0\prime}}$ in dem rechtw. Dreieck $a_2 b_2 a^{0\prime}$ gleich der doppelten Differenz der Strecken $a_2 a'$ und $b_2 b'$ sein muss.

Figur 35.

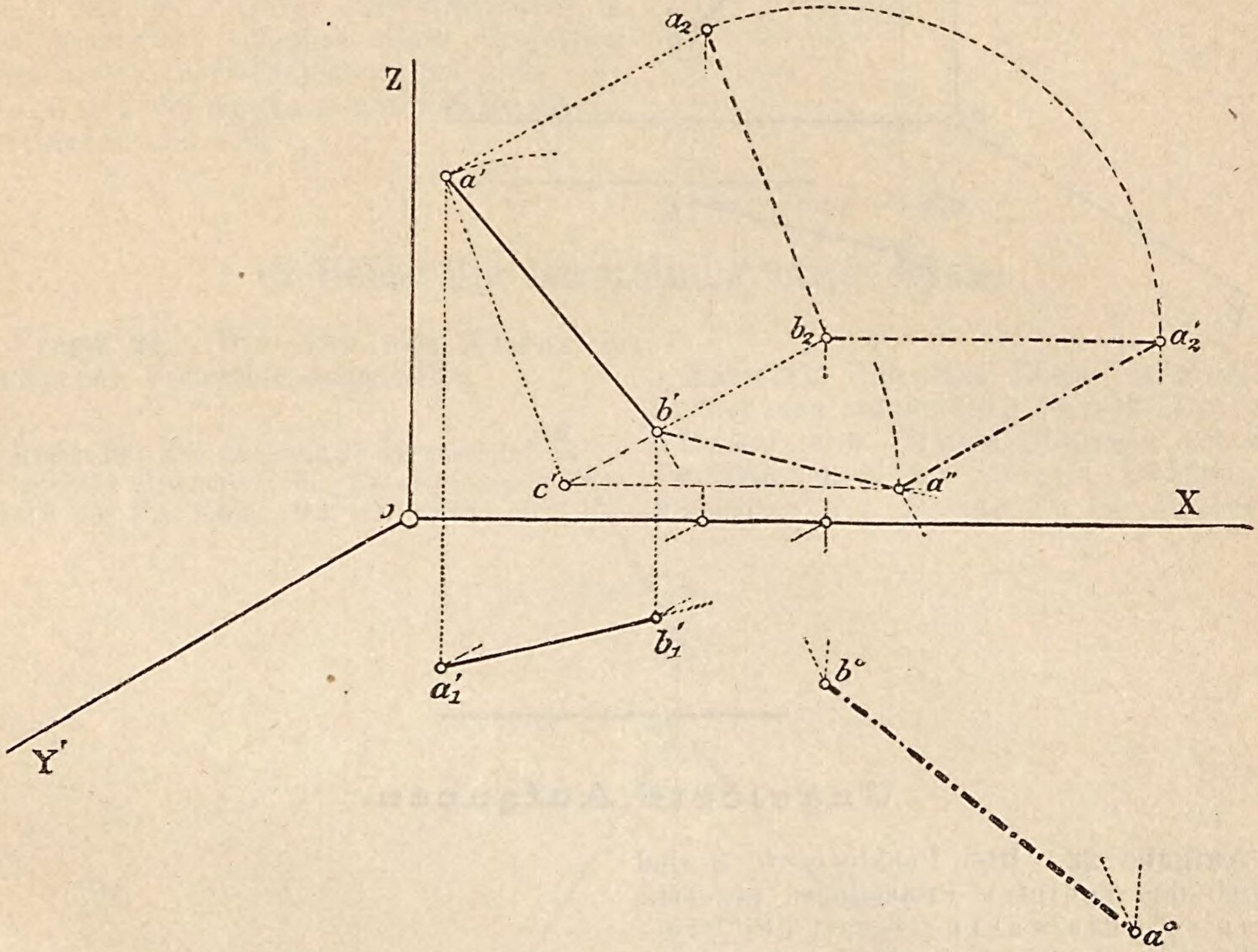


Man erhält somit bei der Darstellung in schiefer Projektion, sowohl den Neigungswinkel einer Geraden mit der **Pr. Eb.** als auch die wahre Länge einer bestimmten Strecke aus einem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem die eine Kathete gleich der rechtw. Projektion der Strecke ist, während die andere Kathete eine Länge gleich der doppelten Differenz der Abstände zwischen **rechtw.** und **schiefer** Projektion der Endpunkte der Strecke besitzt. Die Hypotenuse dieses Dreiecks gibt die wahre Länge der Strecke an und schliesst mit der erstgenannten Kathete den gesuchten Neigungswinkel w' ein.

Erkl. 26. Das nebenstehende zweite Konstruktionsverfahren bringt die Drehung des räumlichen Trapezes aa_2b_2b um die Projizierende bb_2 bis zum Parallelismus mit der **Pr. Eb.** E_1 und hierauf die Umlegung des gedrehten Trapezes um die Seite b_2a_2 in die **Pr. Eb.** E_2 zur Anschauung.

Zweites Konstruktionsverfahren. Man bestimme, siehe Figur 36, zunächst wieder die rechtw. Projektion a_2b_2 von ab. Zieht man ferner durch a' die Parallele $a'c'$ zu a_2b_2, so stellt $a'c'b_2a_2$ die schiefe Projektion eines Rechtecks acb_2a_2 dar, welches um die Linie $c'b_2$ bis zum Parallelismus mit der **Pr. Eb.** E_1 gedreht, als schiefe Projektion

Figur 36.

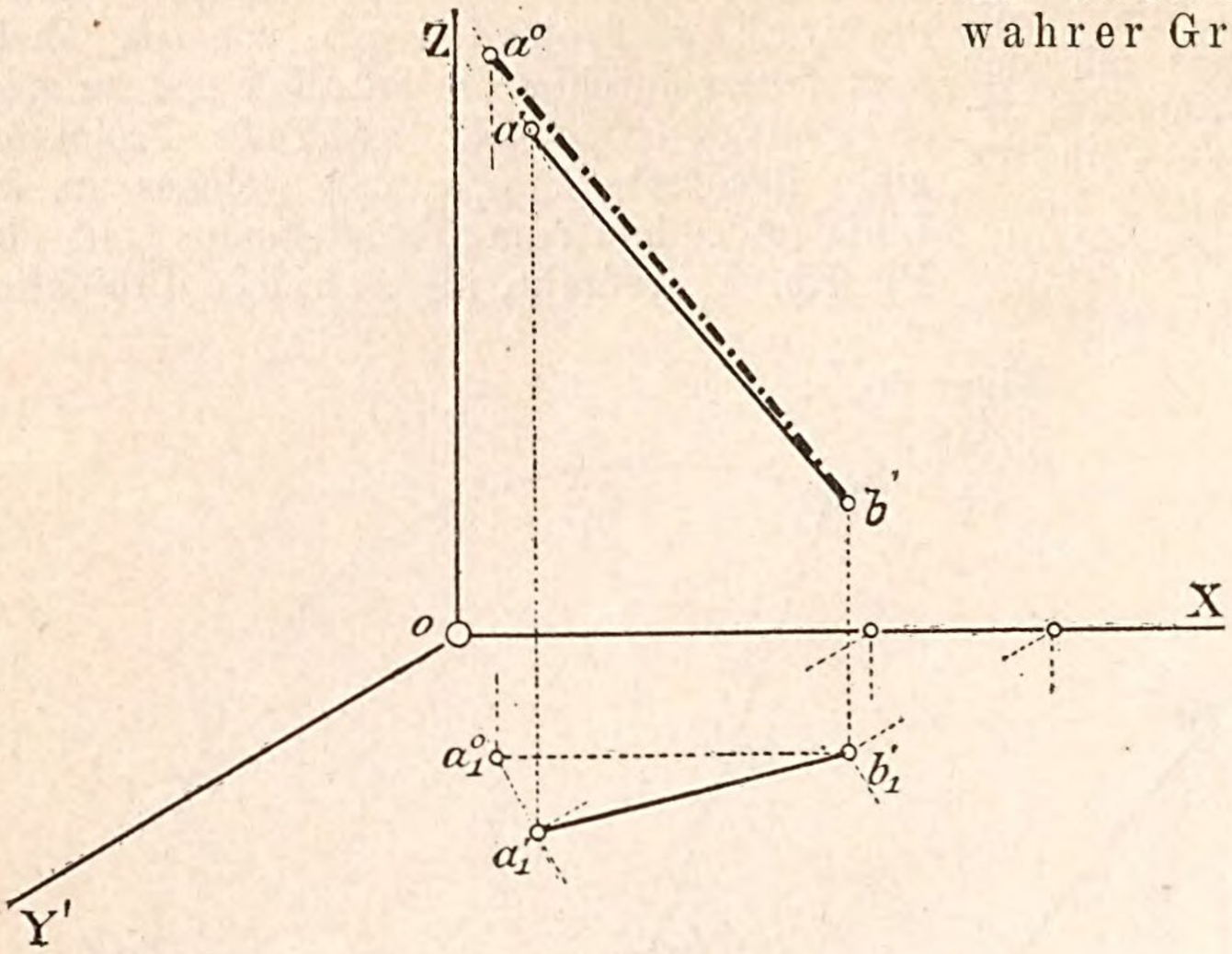


das Parallelogramm $c'a''a'_2b_2$ besitzt, in welchem die Seiten $c'a''$ und $b_2a'_2$ parallel zur X-Achse und gleich den Längen $\overline{c'a'}$ und $\overline{b_2a_2}$ sind. Zeichnet man das Trapez $b_2b^0a^0a_2$, so dass $\overline{b^0b_2}$ und $\overline{a^0a'_2}$ senkrecht zu $b_2a'_2$ und gleich den Doppellängen b_2b' und a'_2a'' sind, so schliesst die Seite b^0a^0 mit $b_2a'_2$ den gesuchten Neigungswinkel ein und ist der Grösse nach gleich der wahren Länge von ab.

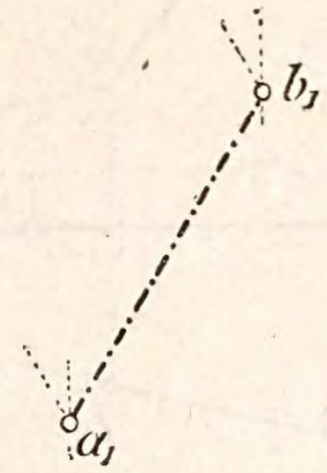
Erkl. 27. Das nebenstehende dritte Konstruktionsverfahren bringt die Drehung des räumlichen Trapezes aa_1b_1b bis zum Parallelismus mit der **Pr. Eb.** E_2 zur Anschauung.

Drittes Konstruktionsverfahren. Man bestimme zunächst die rechtw. Projektion a_1b_1 von ab, zeichne $\overline{b'_1a^0_1} = \overline{b_1a_1}$ und parallel zur X-Achse und ziehe schliesslich $\overline{a'a^0}$ gleich und parallel $\overline{a_1a^0_1}$, so stellt die Strecke $\overline{b'a^0}$ die wahre Länge von ab dar und schliesst

Figur 37.



mit der Richtung der X-Achse den Winkel der Geraden ab mit der **Pr. Eb.** E in wahrer Grösse ein.



Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 22. Drei Punkte a, b, c sind durch ihre schiefen Projektionen gegeben; man soll die wahre Gestalt des Dreiecks abc durch Ermittelung seiner Seitenlängen konstruieren.

Aufgabe 23. Zwei Punkte a und b sind durch ihre schiefen Projektionen gegeben; man soll in der **Pr. Eb.** E_1 einen Punkt konstruieren, dessen Entfernungen von a und b gleich gegebenen Streken sind.

Aufgabe 24. Zwei Punkte a und b sind durch ihre schiefen Projektionen gegeben; auf der Geraden ab ist ein Punkt zu suchen, der die Strecke $\overline{ab}$ in einem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilt.

Aufgabe 25. Von einer Geraden $\overline{ab}$ kennt man ihre schiefe Grundrissprojektion $a'_1b'_1$, ihre Spur s'_1, sowie ihren Winkel mit der **Pr. Eb.** E_2. Man soll die schiefe Projektion $a'b'$, sowie die wahre Länge der Geraden konstruieren.

Aufgabe 26. Man löse die Aufgaben 6 bis 10, I. Teil, in schiefer Projektion, wenn in den genannten Aufgaben unter Projektion stets die schiefe Projektion und unter Abstand stets der Abstand von der **Pr. Eb.** E_2 verstanden sein soll.

C) Ueber die Darstellung einer Ebene.

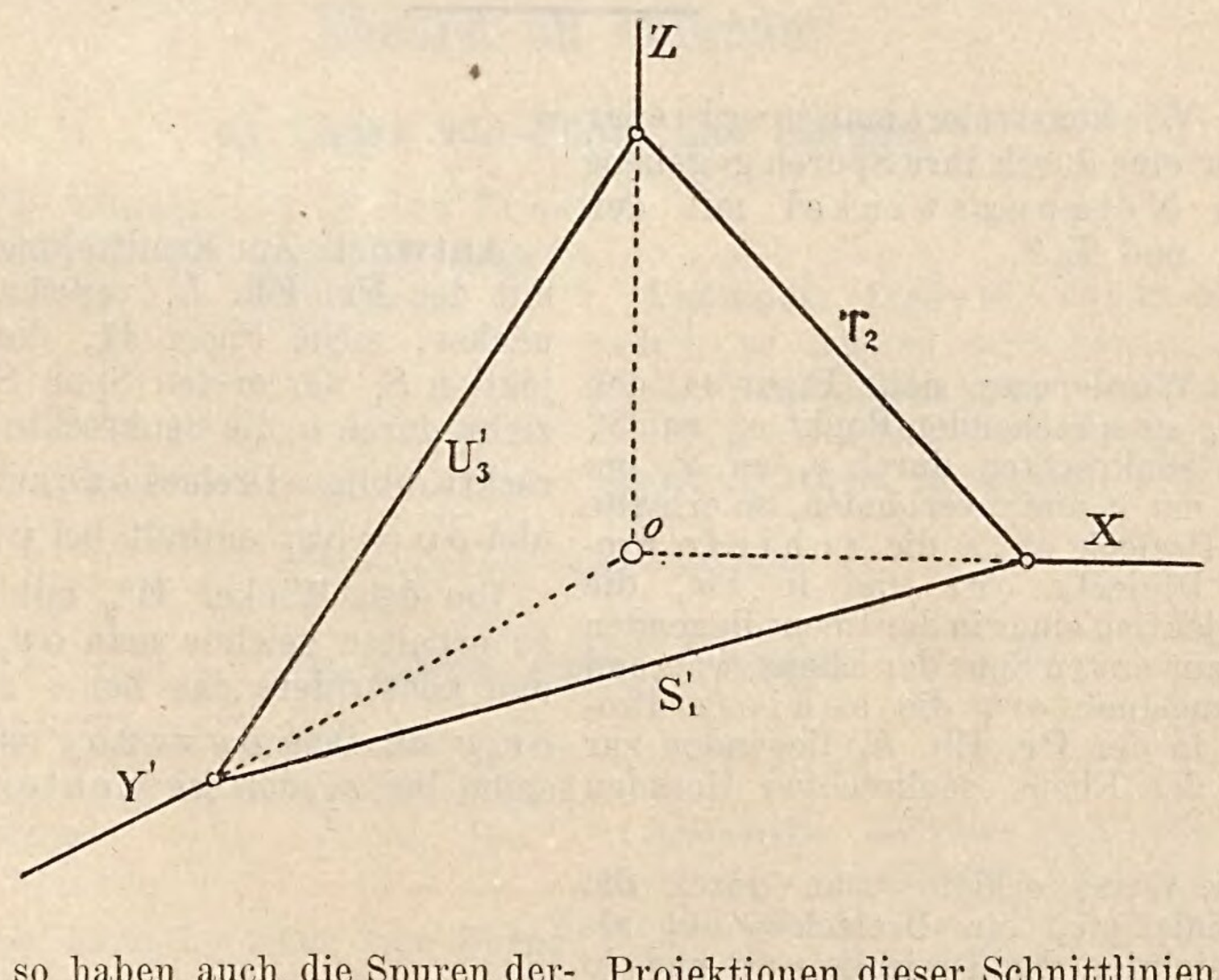
Frage 23. Wie wird eine Ebene in schiefer Projektion dargestellt?

Erkl. 28. Die in Figur 38 dargestellte Ebene bezeichnet eine solche in ganz allgemeiner Lage gegen die **Pr. Ebn.** Hat die Ebene eine besondere Lage, so haben auch die Spuren derselben besondere Lagen gegen die Achsen X, Y' und Z. Steht z. B. eine Ebene zu einer der **Pr. Ebn.** senkrecht, so werden stets zwei der Spuren parallel zu einer der drei Achsen laufen, zu jener Achse nämlich, zu welcher die Ebene selbst parallel ist.

In Figur 39 ist beispielsweise eine zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechte Ebene, d. h. eine pro-

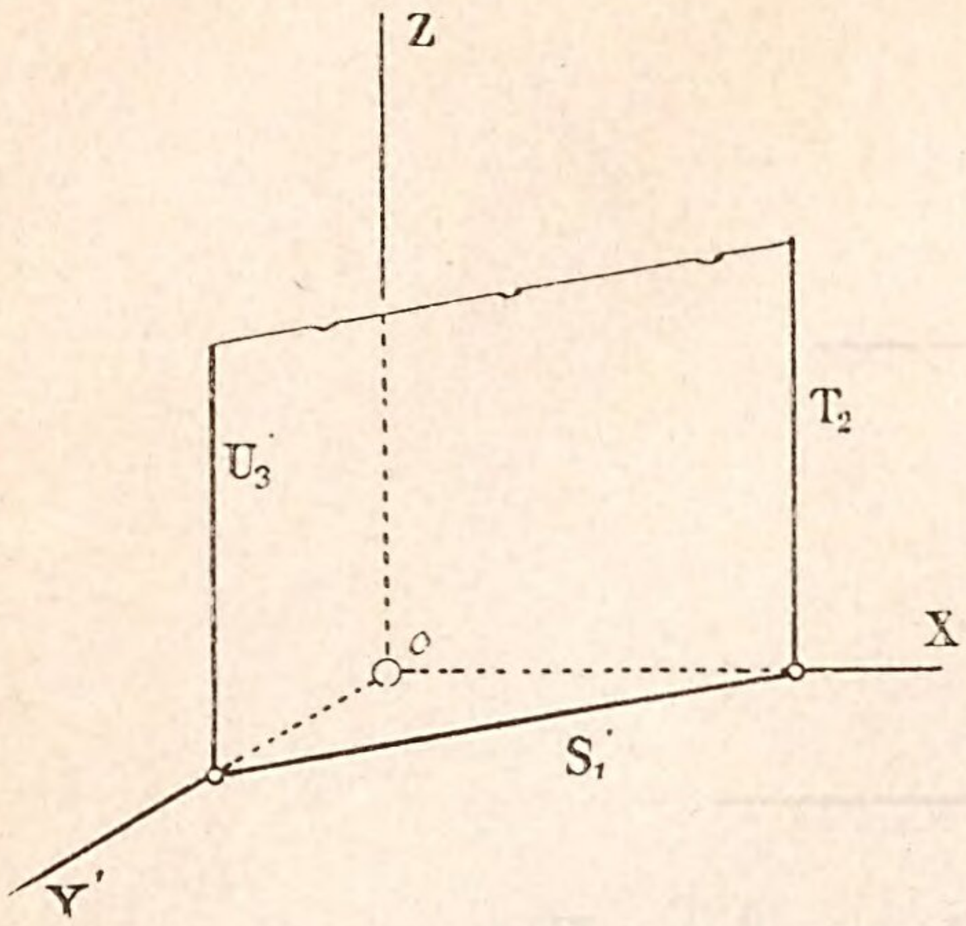
Antwort. Um eine Ebene darzustellen, benützt man zweckmässig die schiefen Projektionen ihrer Durchschnittslinien mit den **Pr. Ebn.**, d. h. ihre Spuren. In Figur 38 bezeichnen S'_1, T_2 und U'_3 die schiefen Projektionen dieser Schnittlinien und die hierdurch dargestellte Ebene kann man als Ebene STU bezeichnen.

Figur 38.

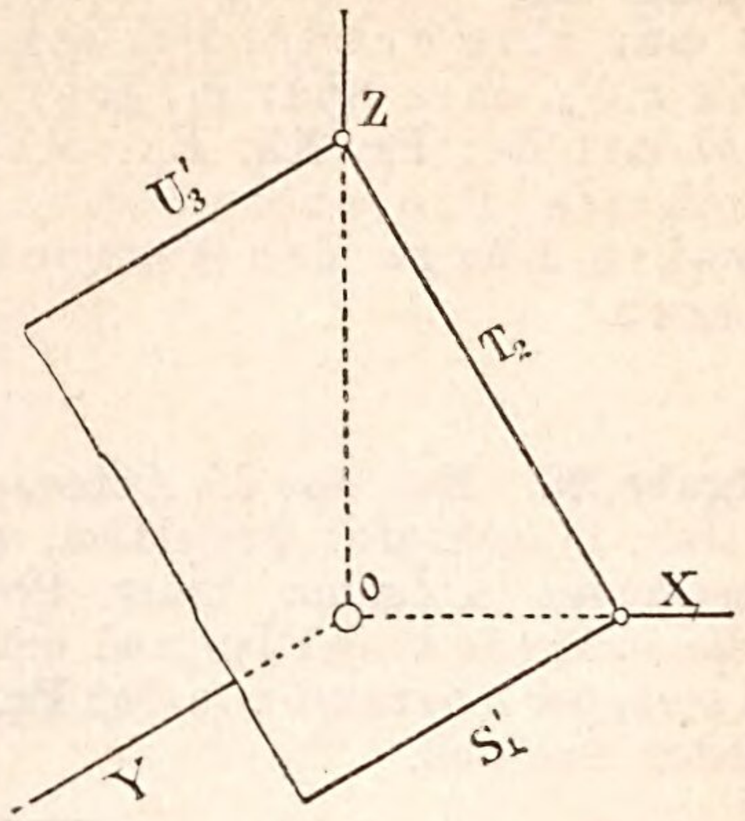


Selbstverständlich genügen zur Bestimmung der Ebene schon zwei dieser Spuren; man gibt sich in der Regel auch nur die erste und zweite Spur.

Figur 39.



Figur 40.



jizierende Ebene dargestellt, für welche die Spuren T_2 und U'_3 parallel zur Z-Achse gerichtet sein müssen.

Die in Figur 40 dargestellte Ebene ist dagegen senkrecht zur **Pr. Eb.** E_2. Man zeichne eine zur **Pr. Eb.** E_3 senkrechte Ebene. Ist eine Ebene parallel zu einer **Pr. Eb.**, so sind stets zwei der Spuren parallel zu jener Achse, welche zur Ebene selbst parallel ist, die dritte Spur fällt in unendliche Ferne.

Frage 24. Wie konstruiert man in schiefer Projektion für eine durch ihre Spuren gegebene Ebene ihren Neigungswinkel mit den **Pr. Ebn.** E_1 und E_2?

Erkl. 29. Würde man, siehe Figur 41, den dem Punkt v_1 entsprechenden Punkt v'_1 auf S'_1 mittels einer Senkrechten durch v_1 zu S'_1 bestimmen und mit o und z verbinden, so erhielte man in dem Dreieck ov'_1z die schiefe Projektion des Dreiecks ovz und in zv'_1 die schiefe Projektion einer in der Ebene liegenden Senkrechten zur ersten Spur der Ebene, während die Verbindungslinie ov'_1 die schiefe Projektion einer in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden zur ersten Spur der Ebene senkrechten Geraden ergäbe.

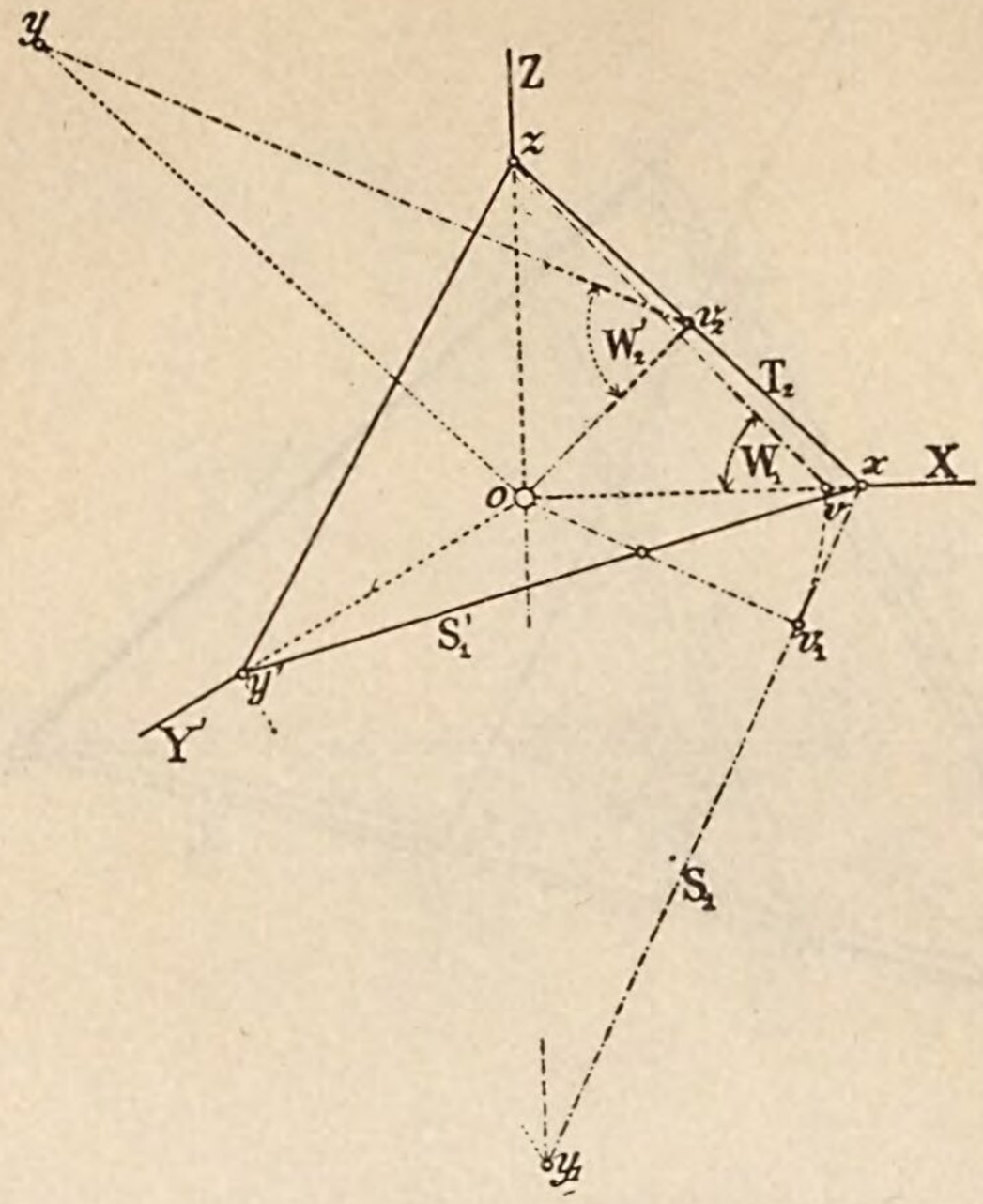
In gleicher Weise erhielte man durch die Verbindungslinie $y'v_2$ ein Dreieck $y'ov_2$ als schiefe Projektion des Dreiecks yov und in der Geraden $y'v_2$ die schiefe Projektion einer in der Ebene liegenden zur Spur T' senkrechten Geraden, deren rechtw. Projektion durch ov_2 gegeben wäre.

Mit anderen Worten: „In den Linien zv'_1 und yv_2 erhält man die schiefen Projektionen der in der Ebene durch die Punkte z und y gezogenenen Neigungslinien.“

Antwort. Zur Ermittelung des Winkels W_1 mit der **Pr. Eb.** E_1 verschafft man sich zunächst, siehe Figur 41, die rechtw. Projektion S_1 der ersten Spur S der Ebene und zieht durch o die Senkrechte ov_1 hiezu. Ein rechtwinkliges Dreieck ozv mit den Katheten $\overline{oz}$ und $\overline{ov} = \overline{ov_1}$ enthält bei v den Winkel W_1.

Um den Winkel W'_2 mit der **Pr. Eb.** E_2 zu erhalten zeichne man ov_2 senkrecht zu T_2 und konstruiere das bei o rechtw. Dreieck ov_2y so, dass $\overline{oy} = 2\overline{oy'}$ ist, so enthält dasselbe bei v_2 den gesuchten Winkel W'_2.

Figur 41.



D) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander.

a) Lagen von Punkt und Gerade.

Frage 25. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen eines Punktes zu einer Geraden.

Antwort. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so müssen schiefe Projektionen des Punktes und seines Grundrisses in den gleichnamigen schiefen Projektionen der Geraden liegen, im andern Fall nicht.

---

b) Lagen zweier Geraden.

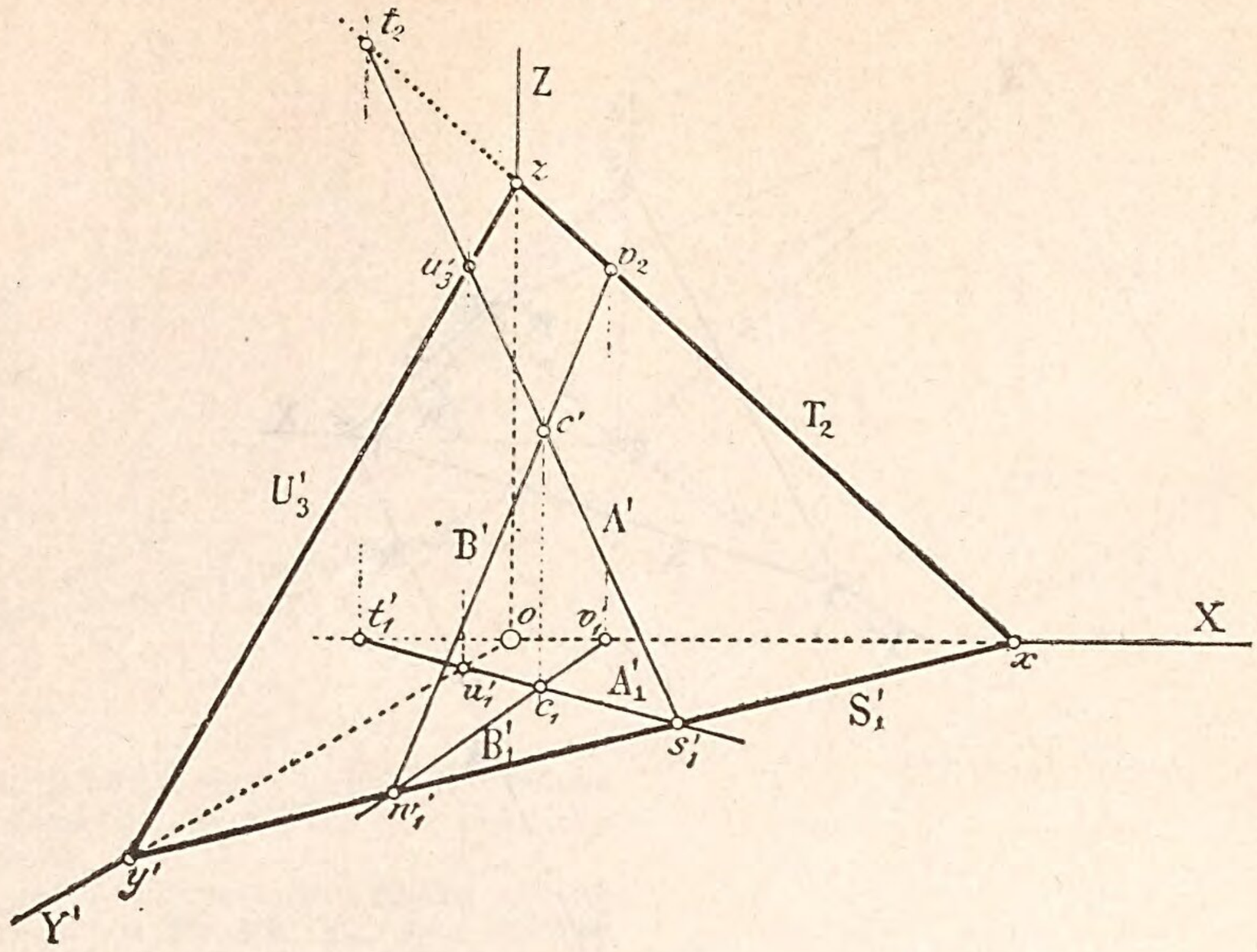
Frage 26. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen zweier Geraden?

Erkl. 30. Man kann nunmehr eine Ebene auch durch andere Bestimmungsstücke, etwa durch drei nicht in gerader Linie befindlichen Punkte oder aber durch zwei sich schneidende bezw. parallele Geraden sich geben und aus diesen Bestimmungsstücken die Spuren der Ebene konstruktiv ermitteln, wie dies z. B. in Figur 42, in welcher die sich schneidenden Geraden A und B als gegeben vorausgesetzt sein sollen, geschehen

Antwort. Schneiden sich die Geraden, so müssen sowohl die schiefen Projektionen der Geraden als auch die ihrer Grundrisse sich so schneiden, dass diese Schnittpunkte schiefe und Grundrissprojektion des Schnittpunktes der Geraden darstellen, d. h. dass die Verbindungslinie dieser Punkte parallel zur Z-Achse läuft, siehe die Geraden A und B der Figur 42.

Laufen aber die Geraden zu einander parallel, so sind sowohl ihre schiefen

Figur 42.



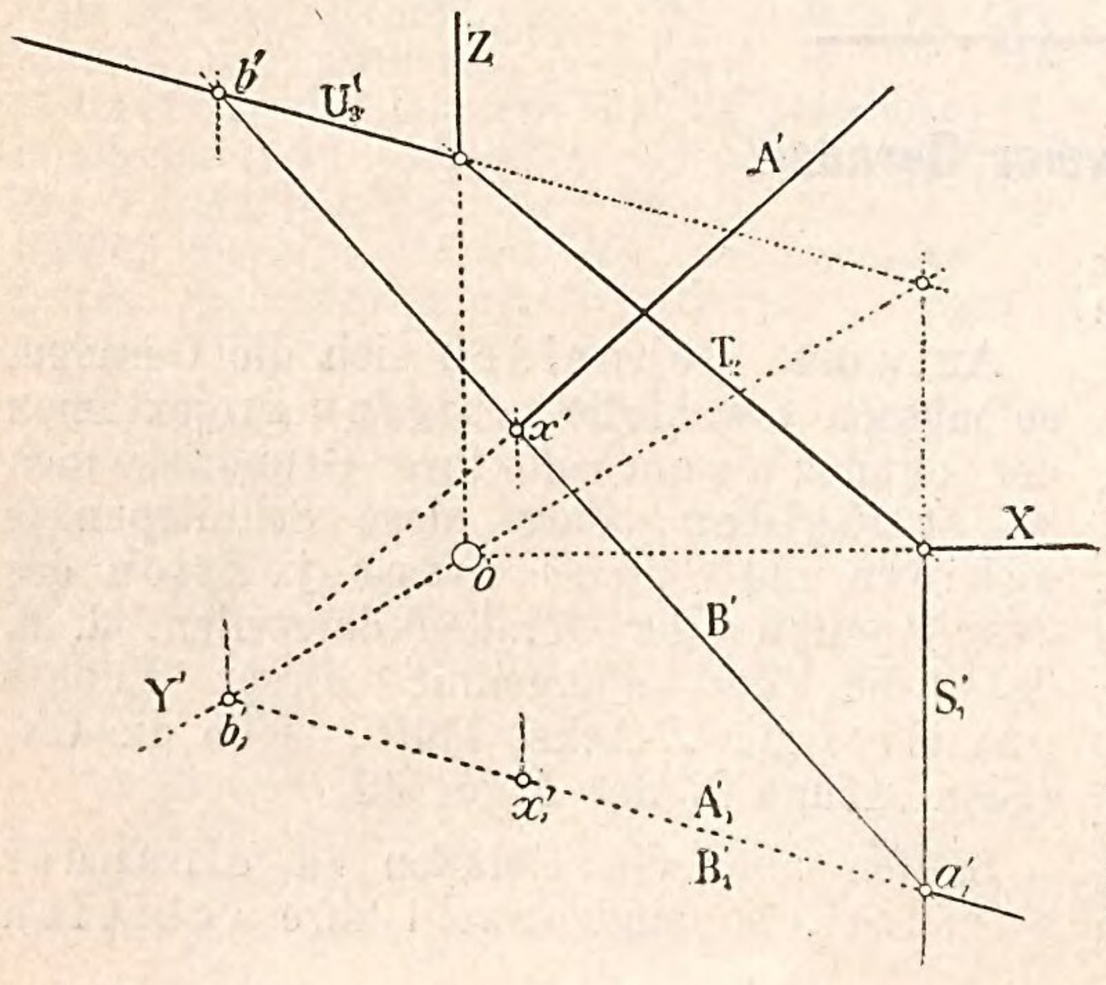
ist. Es liefern die Schnittpunkte s'_1 und w'_1 Punkte der ersten Spur S'_1, während den Schnittpunkten t'_1 und v'_1 von A'_1 und B'_1 mit der X-Achse auf A' und B' die Punkte t_2 und v_2 der zweiten Spur T_2 der Ebene entsprechen. Damit ist aber zu gleicher Zeit auch die dritte Spur U'_3 gegeben. (Punkt $u'_1 u'_3$ stellt die schiefen Projektionen der dritten Spur der Geraden A dar).

als auch ihre Grundrissprojektionen zu einander parallel. Sind endlich die Geraden windschief, so können ihre schiefen und Grundrissprojektionen ganz beliebige Lagen zu einander haben.

c) Lagen einer Geraden und einer Ebene.

Frage 27. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen einer Geraden und einer Ebene?

Figur 43.

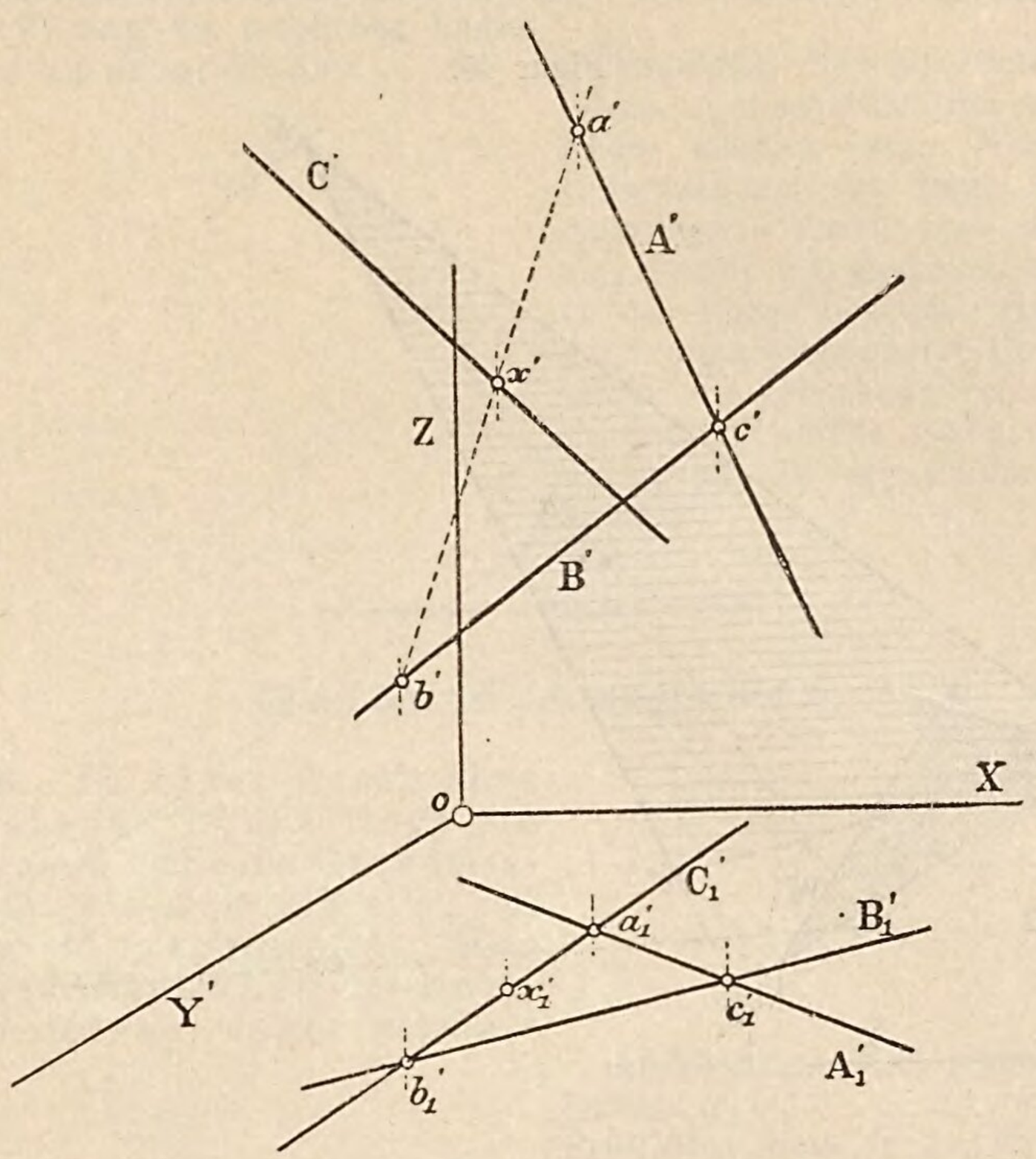


Antwort. Liegt eine Gerade in einer Ebene und ist letztere durch ihre Spuren gegeben, so müssen auch die Spuren der Geraden in die gleichnamigen Spuren der Ebene fallen. Bestimmt man somit von einer gegebenen Geraden ihre Spuren, so kann man aus der Lage derselben zu den Spuren der Ebene unmittelbar erkennen, ob die Gerade in der Ebene liegt oder nicht.

Im letzteren Fall kann nun entweder ein Schneiden der Geraden mit der Ebene oder ein Parallelsein mit ihr stattfinden. Um hierüber zu entscheiden, schlägt man den schon früher angegebenen Weg ein, d. h. man nimmt zunächst an, die Gerade A'_1 sei die schiefe Grundrissprojektion B'_1 einer in der Ebene liegenden Geraden B; ihre schiefe Projektion wird dann die Gerade B' sein, gehend durch die Punkte a'_1 und b' auf S'_1 und U'_3. Je nachdem nun die Geraden B' und A'

Erkl. 31. Die Untersuchung über die Lage einer Geraden zu einer Ebene lässt sich aber auch in gleicher Weise durchführen wie in Antwort der Frage 27, für den Fall die Ebene durch andere Bestimmungsstücke als durch ihre Spuren gegeben sein sollte. Ist beispielsweise, siehe Figur 44, die Ebene durch zwei sich schneidende Geraden A und B gegeben und ist C die Gerade, deren Schnitt mit Ebene AB eventuell bestimmt werden soll, so braucht man nur die Schnittpunkte a'_1 und b'_1 von C'_1 mit A'_1 und B'_1 auf A' und B' zu projizieren, so liefert die Verbindungslinie $a'b'$ auf C' die **schiefe** Projektion des Schnittpunktes x der Geraden C mit der Ebene AB. Würde aber sich schneiden oder zu einander parallel laufen, schneidet auch die Gerade A die Ebene UTS in einem Punkte x oder sie ist zu dieser Ebene parallel.

Figur 44.



Erkl. 31 a. Die in Antwort der Frage 27 sowie in Erkl. 31 durchgeführte Untersuchung über die Lage einer Geraden zu einer Ebene enthält zugleich die Lösung der Aufgabe:

„Man soll den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene konstruieren."

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 27. Drei Punkte a, b, c sind als Eckpunkte eines Dreiecks abc durch ihre schiefen Projektionen a'_1, a', b'_1, b', c'_1, c' gegeben. Man soll den Winkel der Dreiecksebene mit der **Pr. Eb.** E_2,

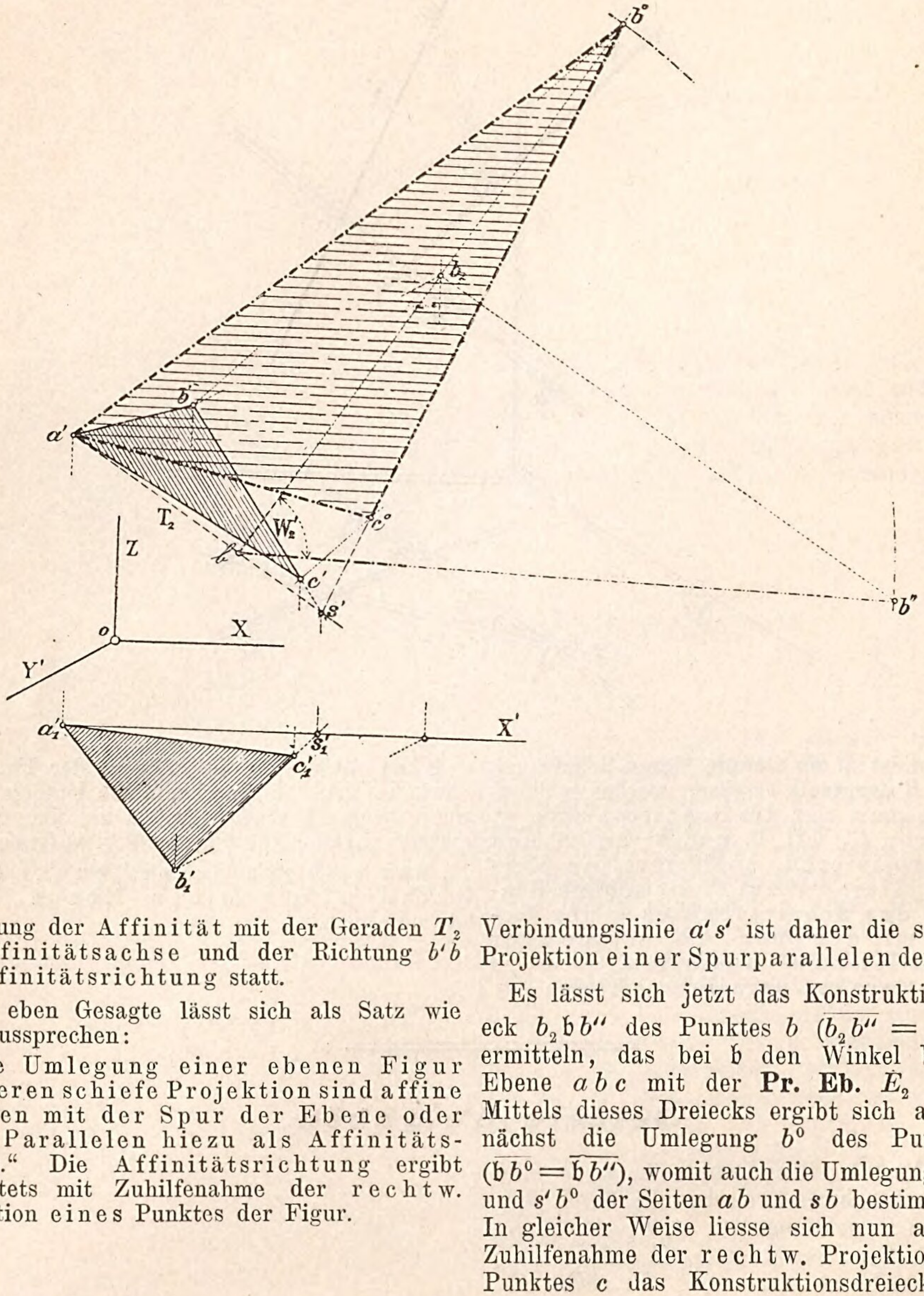
sowie die wahre Gestalt des Dreiecks abc konstruieren.

Erkl. 32. Mit Rücksicht auf die Beziehung $\frac{\overline{s'c'}}{\overline{s'c^0}} = \frac{\overline{s'b'}}{\overline{s'b^0}}$ siehe Figur 45, läuft die Linie $c'c^0$ parallel zur Linie $b'b^0$, d. h. es findet zwischen den Dreiecken $a'b'c'$ und $a^0b^0c^0$ die Beziehung der Affinität mit der Geraden T_2 als Affinitätsachse und der Richtung $b'b$ als Affinitätsrichtung statt.

Das eben Gesagte lässt sich als Satz wie folgt aussprechen:

„Die Umlegung einer ebenen Figur und deren schiefe Projektion sind affine Figuren mit der Spur der Ebene oder einer Parallelen hiezu als Affinitätsachse.“ Die Affinitätsrichtung ergibt sich stets mit Zuhilfenahme der rechtw. Projektion eines Punktes der Figur.

Figur 45.



Auflösung. Man konstruiere die rechtw. Projektion b_2 von b und zeichne etwa durch die Ecke a des Dreiecks abc eine Gerade der Ebene parallel zur **Pr. Eb.** E_2, d. h. eine Parallele zur zweiten Spur der Ebene. Die Grundrissprojektion X' dieser Linie läuft parallel zur X-Achse und schneidet die Seite $b_1c'_1$ in einem Punkte s'_1, dem auf $b'c'$ der Punkt s' entspricht. Die Linie T_2, d. i. die Verbindungslinie $a's'$ ist daher die schiefe Projektion einer Spurparallelen der Ebene.

Es lässt sich jetzt das Konstruktionsdreieck $b_2\mathfrak{b}b''$ des Punktes b ($\overline{b_2b''} = 2 \cdot \overline{b_2b'}$) ermitteln, das bei $\mathfrak{b}$ den Winkel W'_2 der Ebene abc mit der **Pr. Eb.** E_2 enthält. Mittels dieses Dreiecks ergibt sich aber zunächst die Umlegung b^0 des Punktes b ($\overline{\mathfrak{b}b^0} = \overline{\mathfrak{b}b''}$), womit auch die Umlegungen $a'b^0$ und $s'b^0$ der Seiten ab und sb bestimmt sind. In gleicher Weise liesse sich nun auch mit Zuhilfenahme der rechtw. Projektion c_2 des Punktes c das Konstruktionsdreieck dieses

Punktes und damit die Umlegung c^0 von c ermitteln, wodurch sich dann in dem Dreieck $a' b^0 c^0$ die Umlegung des Dreiecks abc, d. h. dessen wahre Gestalt ergäbe.

---

d) Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

Frage 28. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

Antwort. Soll ein Punkt in einer Ebene liegen, so muss durch ihn eine Gerade der Ebene möglich sein. Man wird daher zur Untersuchung der Lage eines Punktes zu einer Ebene durch eine seiner Projektionen eine Gerade als gleichnamige Projektion einer in der Ebene liegenden Geraden ziehen und deren zugehörige andere Projektion aufsuchen; fallen die gleichnamigen Projektionen von Punkt und Gerade aufeinander, so liegt der Punkt in der Ebene im anderen Fall nicht.

Gelöste Aufgaben.

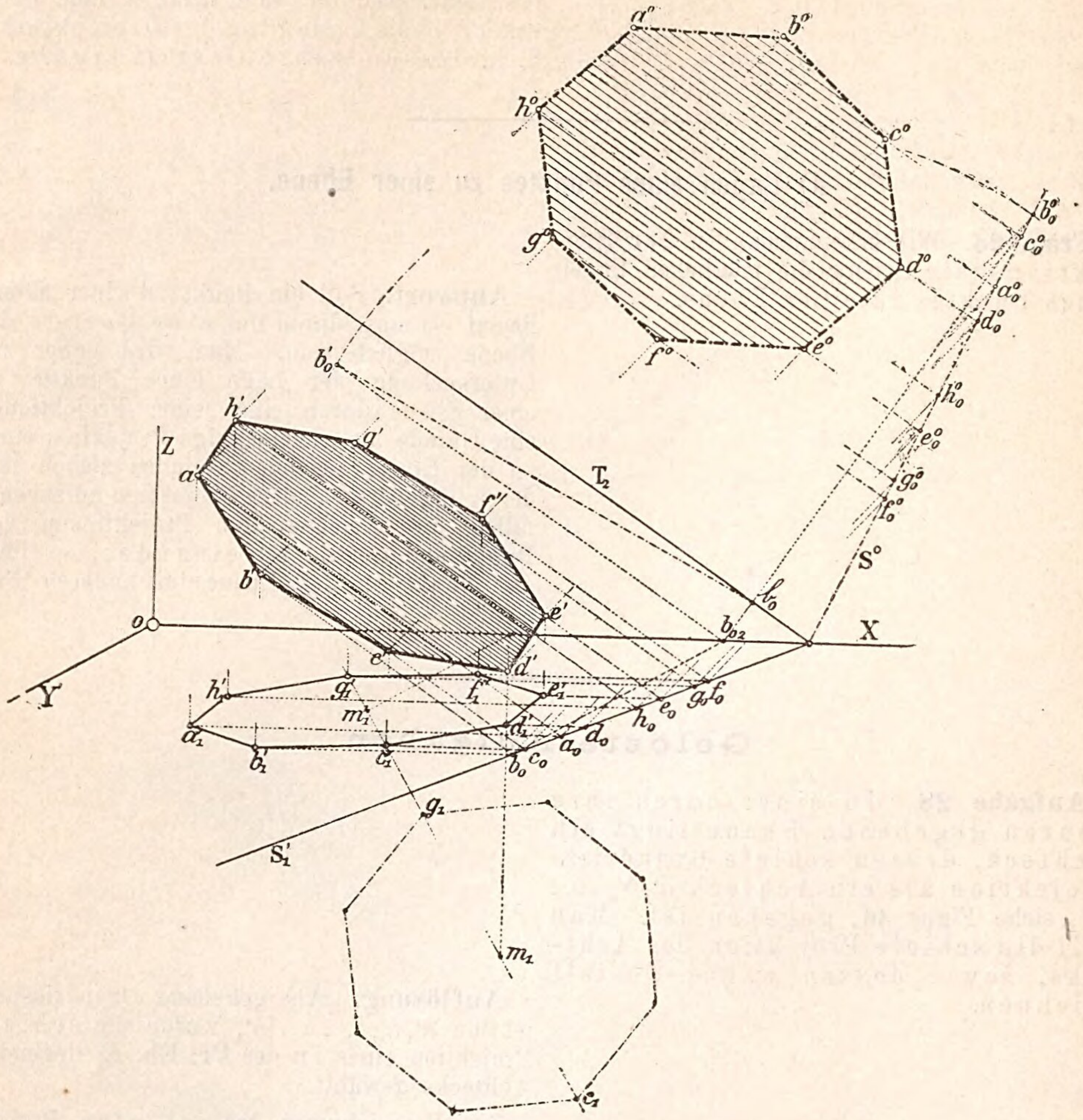
Aufgabe 28. In einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene liegt ein Achteck, dessen schiefe Grundrissprojektion als ein Achteck $a'_1 b'_1 \ldots . h'_1$, siehe Figur 46, gegeben ist. Man soll die schiefe Projektion des Achtecks, sowie dessen wahre Gestalt zeichnen.

Auflösung. Als gegebene Grundrissprojektion $a'_1 b'_1 \ldots . h'_1$ wurde die schiefe Projektion eines in der **Pr. Eb.** E_1 liegenden Achtecks gewählt.

Zur Verzeichnung der schiefen Projektion $a', b', \ldots . h'$ zieht man zweckmässig durch die Ecken $a'_1, b'_1 \ldots . h'_1$ Parallele zur X-Achse und nimmt dieselben als schiefe Grundrissprojektionen von Geraden der Ebene; deren schiefe Projektionen gehen durch die Schnittpunkte a_0 bis h_0 und sind parallel gerichtet zur Spur T_2. Auf ihnen liegen die Eckpunkte a' bis h'.

Behufs Ermittelung der wahren Gestalt des Achtecks wählt man einen beliebigen Punkt der Achtecksebene, etwa gleich den Punkt b_0 der Spur S, ermittelt dessen rechtw. Projektion b_{02} auf der X-Achse, sowie das Konstruktionsdreieck $b_{02} b'_0 b_0$ und damit die Umlegung b^0_0 des Punktes b und S^0 von S. Durch $b_0 b^0_0$ ist nun die Affinitätsrichtung zwischen Umlegung und schiefer Projektion des Achtecks gegeben. Am schnellsten erhält

Figur 46.



man nun das Achteck a^0, b^0 . . . . h^0, als wahre Gestalt des Achtecks a, b . . . h, durch Ziehen von Parallelen durch die Eckpunkte a', b' . . . h' und a_0, b_0 . . . h_0 zur Affinitätsrichtung, sowie von Parallelen zu T_2 durch die Schnittpunkte $a^0{}_0$, $b^0{}_0$ . . . $h^0{}_0$ auf S^0.

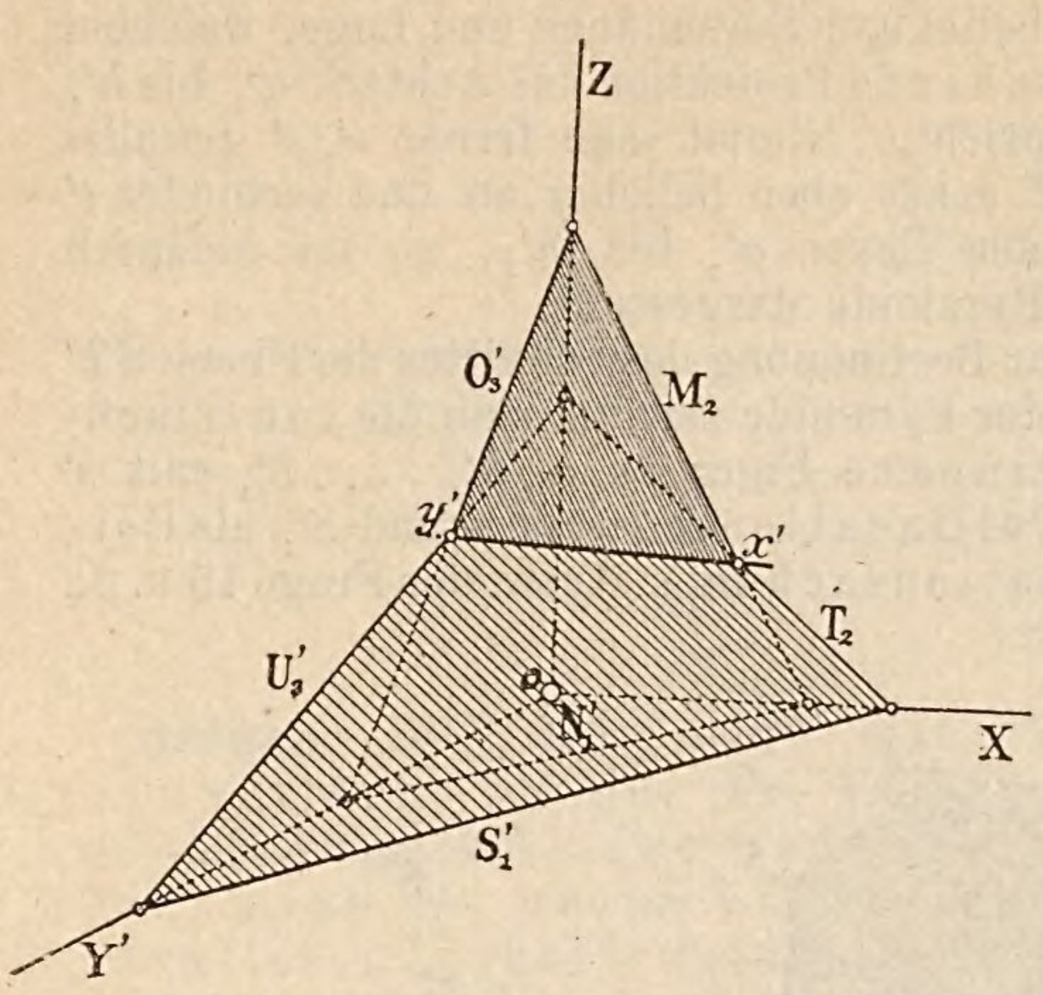
---

e) Lagen zweier Ebenen.

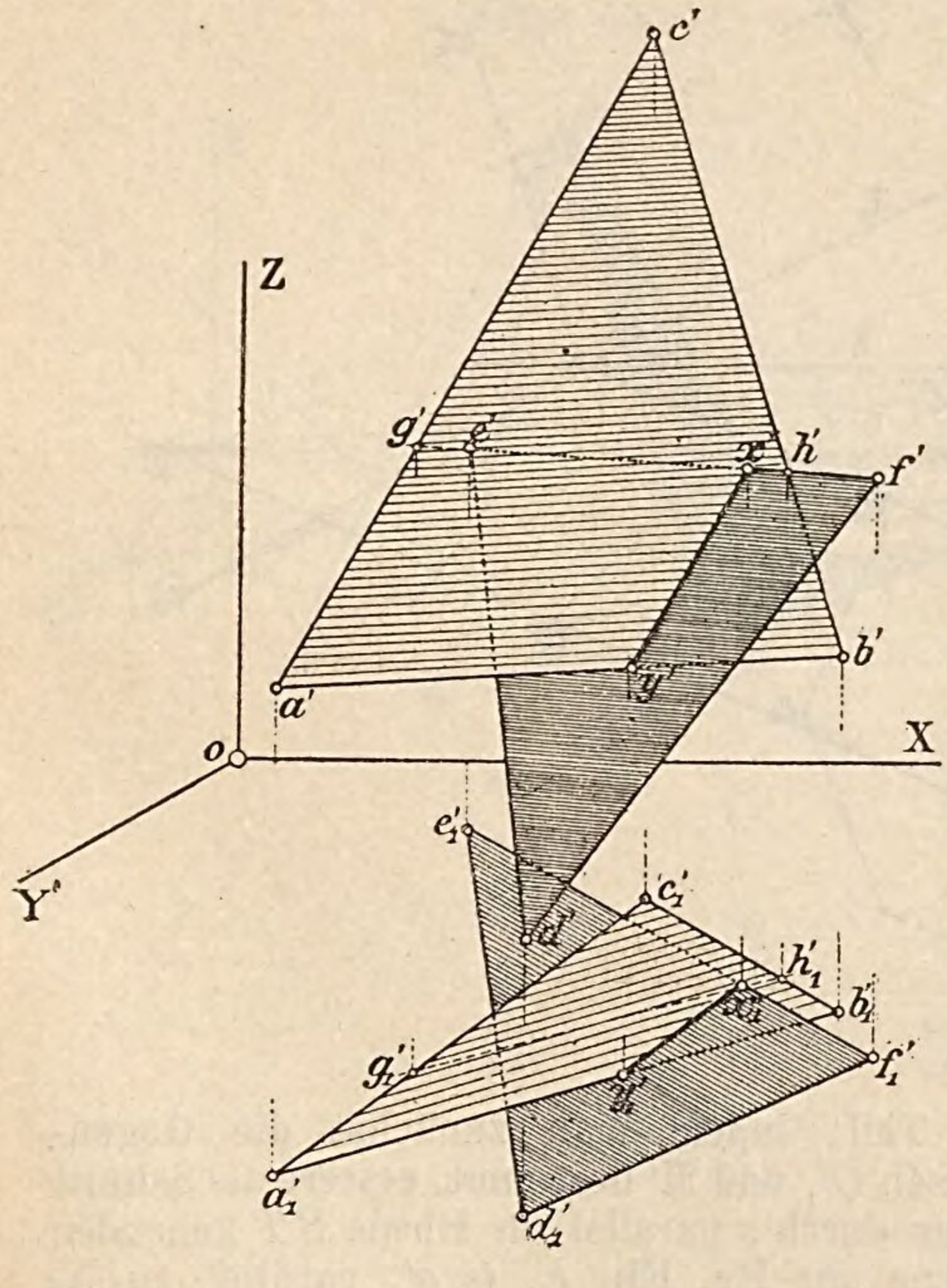
Frage 29. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen zweier Ebenen.

Antwort. Sind die beiden Ebenen durch ihre Spuren gegeben, so werden die Ebenen nur dann zu einander parallel sein, wenn die gleichnamigen Spuren beider Ebenen

Figur 47.



Figur 48.



parallel laufen, im andern Fall findet stets ein Schneiden beider Ebenen statt, und zwar geht die Schnittlinie durch die Schnittpunkte gleichnamiger Spuren der Ebene. So schneiden sich z. B. in Figur 47 sowohl die zweiten, wie die dritten Spuren beider Ebenen, in den Punkten x' und y' bezw., daher ist die Verbindungslinie $x'y'$ die schiefe Projektion der Schnittlinie beider Ebenen; ihre Grundrissprojektion ist in der Figur nicht gezeichnet, sie wäre aber sehr leicht zu erhalten, denn die Grundrissprojektionen der Punkte x und y liegen auf der X- und Y-Achse bezw.

Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren gegeben, so lässt sich aus der Projektionszeichnung nicht unmittelbar die Lage der beiden Ebenen übersehen, in diesem Fall wählt man eben eine beliebige Gerade der einen Ebene und bestimmt deren Schnitt mit der zweiten Ebene. So ist z. B. in Figur 48 die Schnittlinie der beiden Dreiecksebenen, soweit sie den Dreiecken abc und def angehört, bestimmt. Die Verbindungslinie $e'f'$ als schiefe Projektion $g'h'$ einer Geraden des Dreiecks abc aufgefasst, liefert als schiefe Grundrissprojektion die Gerade $g'_1h'_1$, welche auf $e'_1f'_1$ den Punkt x'_1 der Schnittlinie beider Ebenen ergibt. In gleicher Weise kann der Punkt y als Schnittpunkt der Geraden ab mit der Ebene def bestimmt werden.

Gelöste Aufgaben.

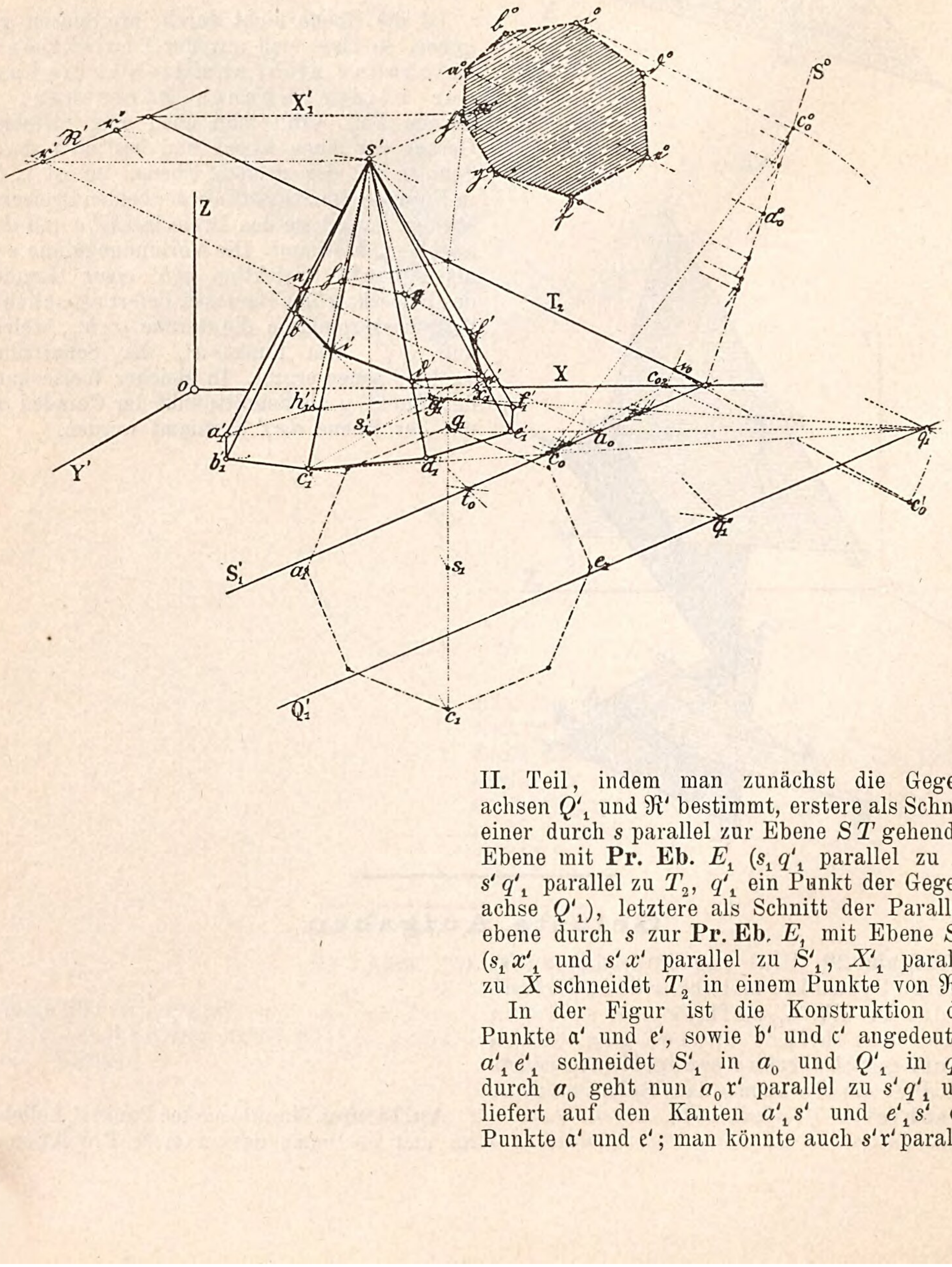
Aufgabe 29. Eine regelmässige achtseitige Pyramide mit ihrer Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 aufliegend, soll von einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene geschnitten werden. Man zeichne die Pyramide samt der Schnittfigur in schiefer Projektion.

Auflösung. Man nehme den Punkt s'_1 beliebig an und bestimme dessen erste Projektion s_1

als Mittelpunkt eines regelmässigen Achtecks von beliebiger Seitenlänge und Lage, welchem als schiefe Projektion das Achteck a'_1 bis h'_1 entspricht. Nimmt man ferner $s'_1 s'$ parallel zu Z sonst aber beliebig an und verbindet s' mit den Ecken a'_1 bis h'_1, so ist hiedurch die Pyramide dargestellt.

Zur Bestimmung des Schnittes der Ebene ST' mit der Pyramide zeichne man die centrisch-collineare Figur zu $a'_1 b'_1 \ldots . h'_1$ mit s' als Collineationscentrum und S'_1 als Collineationsachse, s. Antw. der Frage **15** u. ff.,

Figur 49.



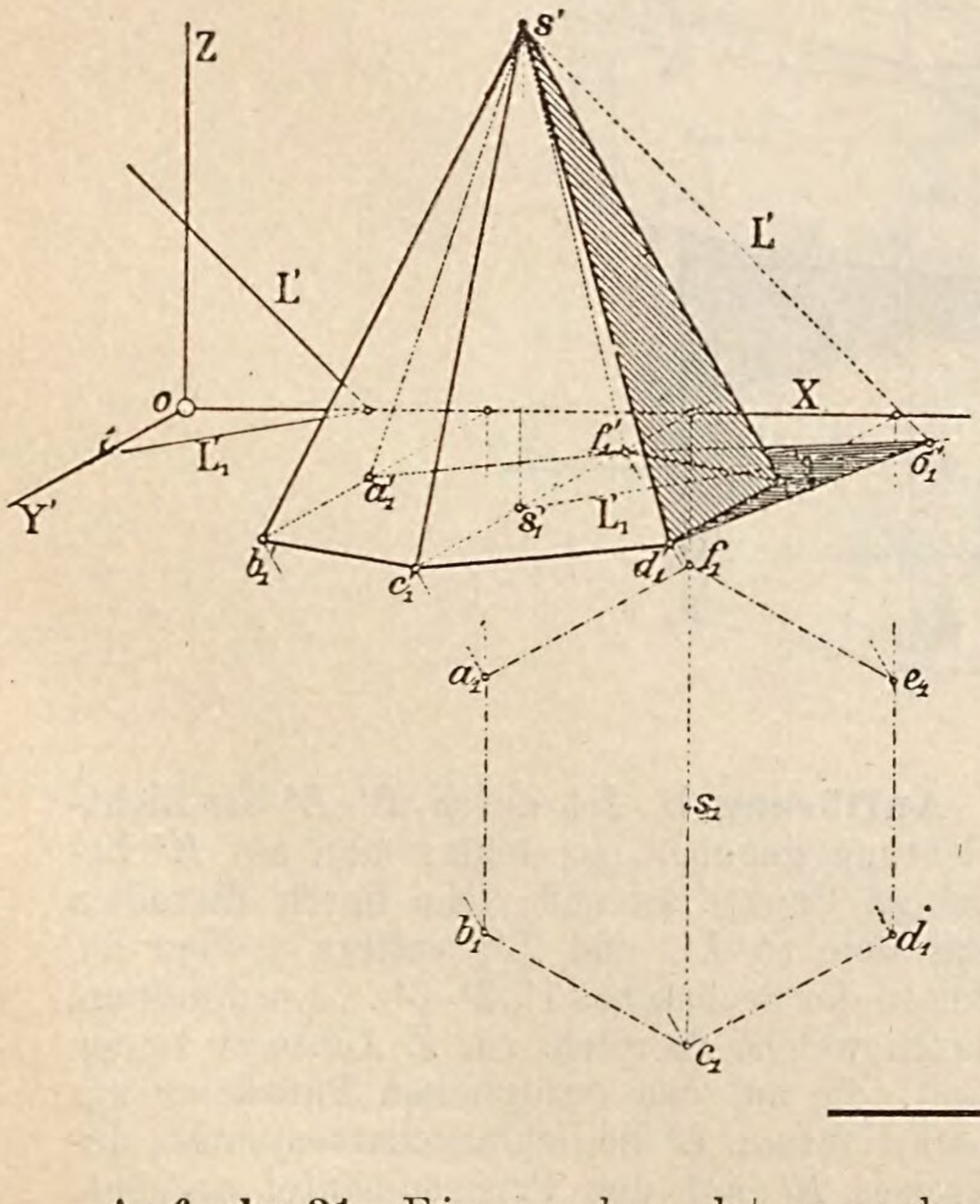
II. Teil, indem man zunächst die Gegenachsen Q'_1 und $\mathfrak{R}'$ bestimmt, erstere als Schnitt einer durch s parallel zur Ebene ST gehenden Ebene mit **Pr. Eb.** E_1 ($s_1 q'_1$ parallel zu X, $s' q'_1$ parallel zu T_2, q'_1 ein Punkt der Gegenachse Q'_1), letztere als Schnitt der Parallelebene durch s zur **Pr. Eb.** E_1 mit Ebene ST ($s_1 x'_1$ und $s' x'$ parallel zu S'_1, X'_1 parallel zu X schneidet T_2 in einem Punkte von $\mathfrak{R}'$).

In der Figur ist die Konstruktion der Punkte a' und e', sowie b' und c' angedeutet. $a'_1 e'_1$ schneidet S'_1 in a_0 und Q'_1 in q'_1, durch a_0 geht nun $a_0 \mathfrak{x}'$ parallel zu $s' q'_1$ und liefert auf den Kanten $a'_1 s'$ und $e'_1 s'$ die Punkte a' und e'; man könnte auch $s' \mathfrak{x}'$ parallel

zu $a'_1 e'_1$ ziehen, wodurch sich gleichfalls $a_0 r'$ und damit a' und e' ergeben würde. In gleicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte der Schnittfigur. Die Ermittelung der wahren Gestalt lässt sich in ähnlicher Weise durchführen wie in Aufgabe 28. Man wählt wieder einen beliebigen Punkt c_0 auf S'_1, bestimmt dessen rechtw. Projektion c_{02}, sowie sein Konstruktionsdreieck $c_{02} c'_0 c_0$ und seine Umlegung c^0_0, wodurch sich die Affinitätsrichtung $c_0 c^0_0$ ergibt.

Aufgabe 30. Für eine mit ihrer Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegende regelmässige sechsseitige Pyramide ist unter Voraussetzung paralleler Lichtstrahlen der Selbstschatten, sowie der Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** darzustellen.

Figur 50.



Auflösung. Die Konstruktion der schiefen Projektion der Pyramide bleibt die gleiche, wie in Aufgabe 29. Ist nun durch $L'_1 L'$ die Lichtrichtung gegeben, so hat nur nötig die erste Spur σ'_1 des durch die Pyramidenspitze $s' s'_1$ gezogenen Lichtstrahles, siehe Figur 50, aufzusuchen, und von σ'_1 an die schiefe Projektion der Pyramidengrundfläche die Streifstrahlen $\sigma'_1 d'_1$ und $\sigma'_1 f'_1$ zu ziehen, so stellen letztere die Schlagschattengrenze der Pyramide auf die **Pr. Eb.** E_1 dar, während durch die Seitenkanten $d'_1 s'$ und $f'_1 s'$ der Selbstschatten der Pyramide begrenzt ist.

Aufgabe 31. Ein senkrechtes sechsseitiges Prisma und eine kreiscylindrische Platte durchdringen sich so, dass die Achsen beider Körper zusammenfallen. Man soll

a) die Körper in schiefer Projektion darstellen, wenn die Körper-Achse parallel zur Z-Achse läuft,

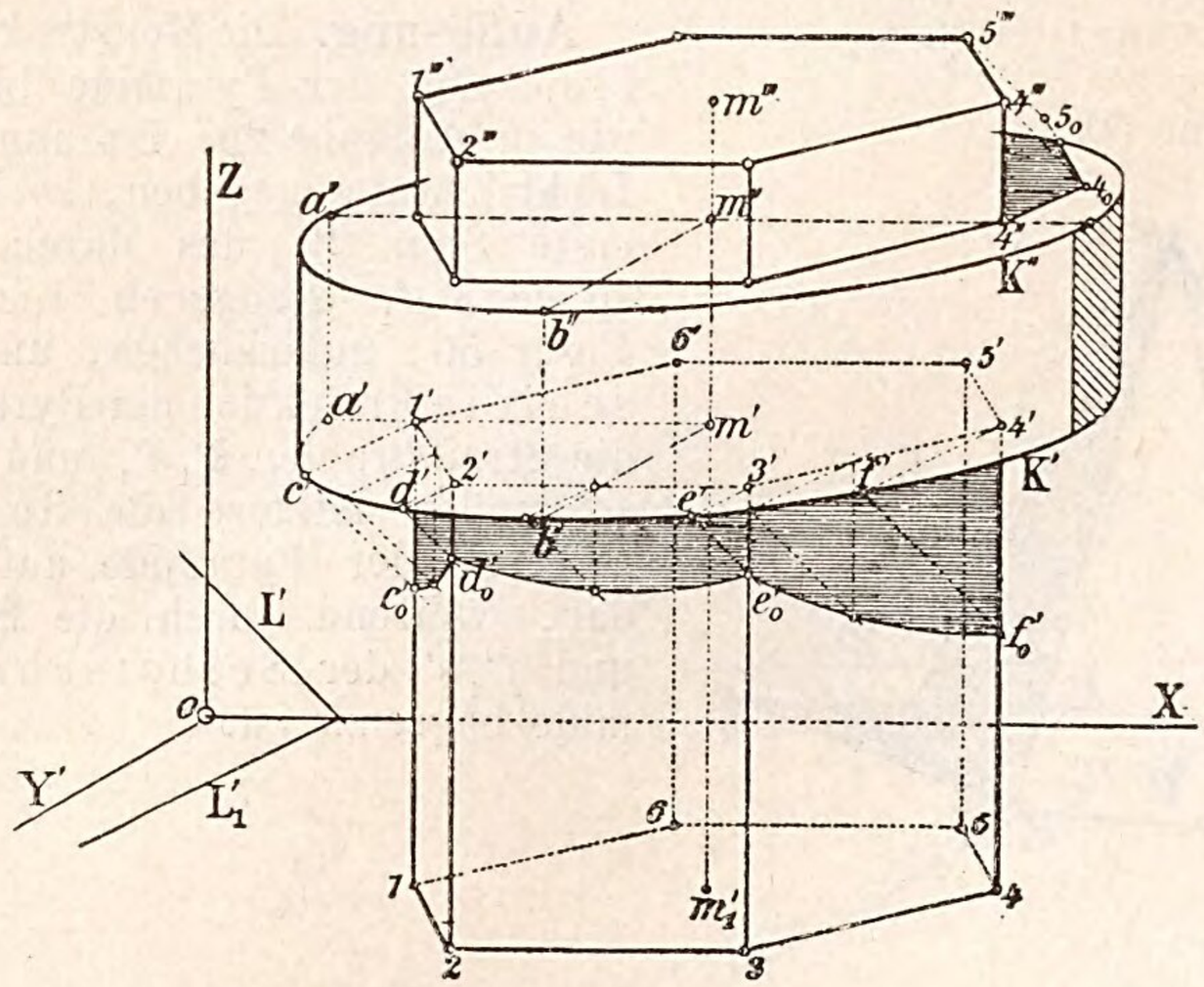
b) den Schlagschatten konstruieren, welcher sowohl vom Cylinder

auf dem Prismenmantel als auch von dem Prisma auf der oberen Fläche der cylindrischen Platte erzeugt wird.

Auflösung a. Man zeichne das Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit Zuhilfenahme seines rechtwinkligen Grundrisses, ziehe durch seinen Mittelpunkt m'_1 die Parallele $m'_1 m'''$ zur Z-Achse und nehme auf der Linie $m'_1 m'''$ die Punkte m', m'' und m''' beliebig an, und zwar als Mittelpunkte von Sechsecken parallel und kongruent dem Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Die Punkte m' und m'' bilden ausserdem die schiefen Projektionen der Mittelpunkte zweier zur **Pr. Eb.** E_1 parallelen Kreise, deren schiefe Projektionen K' und K'' ähnlich wie in Aufgabe 16 konstruiert werden können.

Figur 51.



Auflösung b. Ist durch $L'_1 L'$ die Lichtrichtung gegeben, so nehme man auf K' beliebige Punkte an und ziehe durch dieselben Parallele zu L'_1 und L'; erstere treffen die Seiten des Sechseckes 1', 2', 3' . . . in Punkten, durch welche Parallele zur Z-Achse zu ziehen sind, die auf den bezüglichen Parallelen zur Lichtrichtung L' die Schlagschattenpunkte des Kreises K' auf den Prismenmantel ergeben.

Um die Schlagschattenpunkte c'_0, d'_0 e'_0, f'_0 auf den Prismenkanten zu erhalten, ziehe man durch die Ecken des Sechsecks 1', 2', 3' . . . Parallele zu L'_1 bis zum Schnitt mit K' und durch letztere Punkte Parallele zu L'.

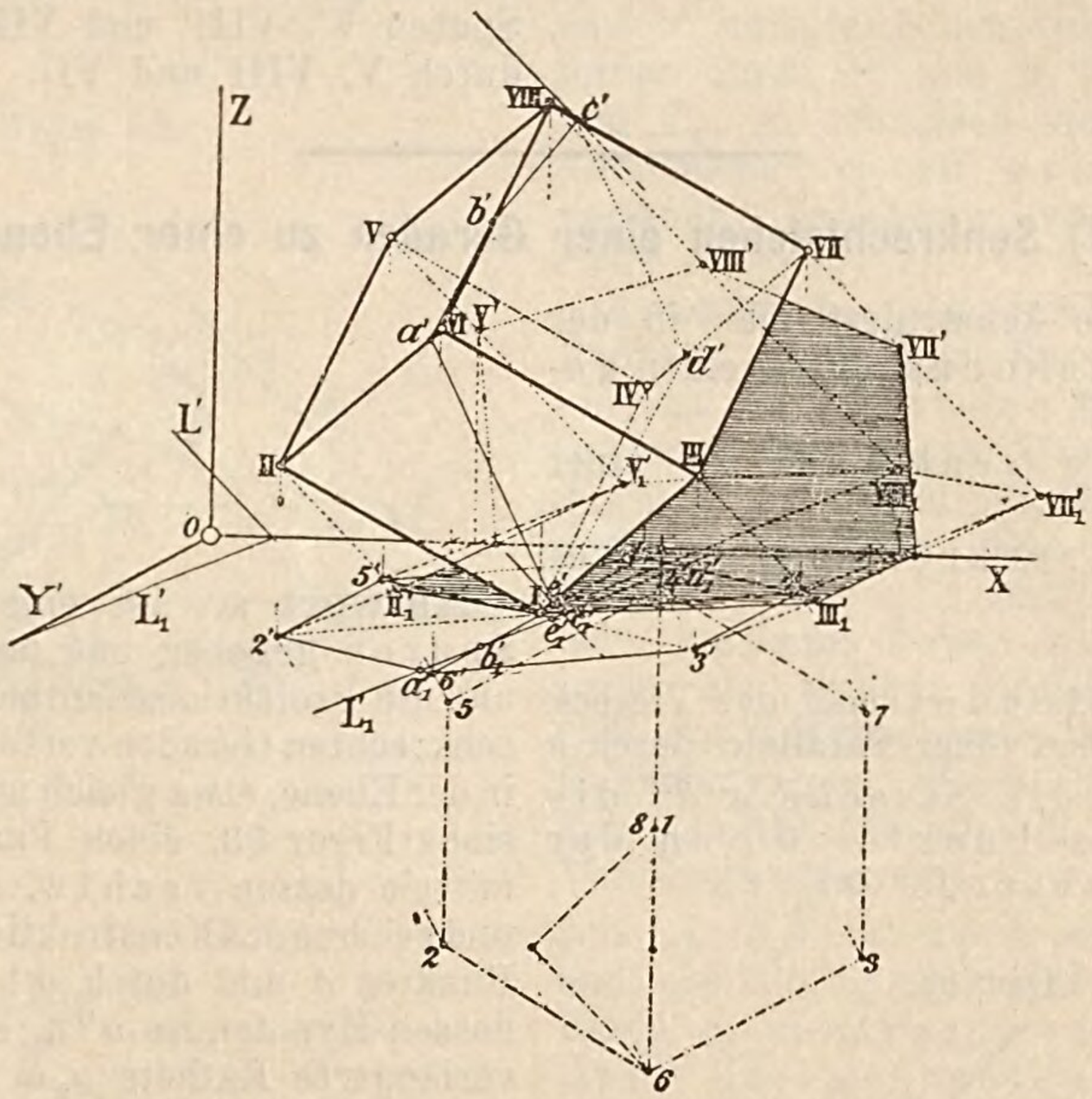
Als Schlagschattengrenze auf die obere Fläche der cylindrischen Platte erscheint der Linienzug $4''4_0 5_0$, dabei ist $4''4_0$ parallel zu L'_1, $4'''4_0$ parallel zu L', endlich $4_0 5_0$ parallel zu $4''5''$.

Zieht man an die Ellipsen K' und K'' Tangenten parallel zu L'_1, so gibt die zur Z-Achse parallele Verbindungslinie der Berührpunkte auf K' und K'' die Selbstschattengrenze für die cylindrische Platte.

Aufgabe 32. Es soll ein Würfel mit gegebener Kante in schiefer Projektion so dargestellt werden, dass eine Hauptdiagonale parallel zur Z-Achse läuft. Ausserdem ist die Selbstschattengrenze des Würfels, sowie sein Schlagschatten auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 zu konstruieren.

Auflösung. Der rechtwinklige Grundriss des Würfels ist begrenzt durch ein Sechseck 2, 6, 3, 7, 4, 5 mit der Seitenlänge $\overline{1,2} = l \cdot \sqrt{2/3}$, dem als schiefer Grundriss das Sechseck 2′, 6′, 3′, 7′, 4′, 5′ entspricht. Die schiefe Projektion I bis VIII des Würfels

Figur 52.



ergibt sich nun einfach durch Ziehen von Parallelen zur Z-Achse durch die Eckpunkte des schiefen Grundrisses und Abtragen der ersten Abstände der Würfelecken auf denselben von den genannten Eckpunkten. Diese Abstände sind für die Ecke I gleich Null, für die Ecken II, III und IV gleich ein Drittel, für die Ecken V, VI und VII gleich zwei Drittel, für die Ecke VIII gleich drei Drittel der Länge der Würfeldiagonale.

In der Figur 52 wurde die Seite des Sechseckes 2 6 3 7 4 5 beliebig gewählt und aus der-

selben der dritte Teil der Würfeldiagonale direkt als Kathete eines gleichschenklig-rechtw. Dreiecks mit der Strecke $\overline{16}$ als Hypotenuse konstruiert.

Zur Konstruktion des Selbstschattens schneide man den Würfel durch eine Lichtebene L'_1, siehe Erkl. 123, II. Teil, L'_1 schneidet die schiefen Grundrisse der Würfelkanten in Punkten a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1, denen auf den schiefen Projektionen der betreffenden Würfelkanten die Punkte a' bis d' entsprechen. Zieht man an das Vieleck $a' \ldots e'$ parallel zu L' die Streifstrahlen, so gehen dieselben durch die Ecken c' und e' und bestimmen hiedurch das Streifpolygon I, II, V, VIII, VII, III, dem als Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 das Polygon I'_1, II'_1, V'_1, $VIII'_1$, VII'_1, III'_1 entspricht. Von diesen Polygonen fallen die Ecken V'_1, $VIII'_1$ und VII'_1 auf die negative **Pr. Eb.** E_1, d. h. die Schlagschatten der Punkte V, VIII und VII fallen auf die **Pr. Eb.** E_2. Man erhält dieselben durch Ermittelung der vertikalen, d. h. der zweiten Spuren V', VIII' und VII' der Lichtstrahlen durch V, VIII und VII.

---

f) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene.

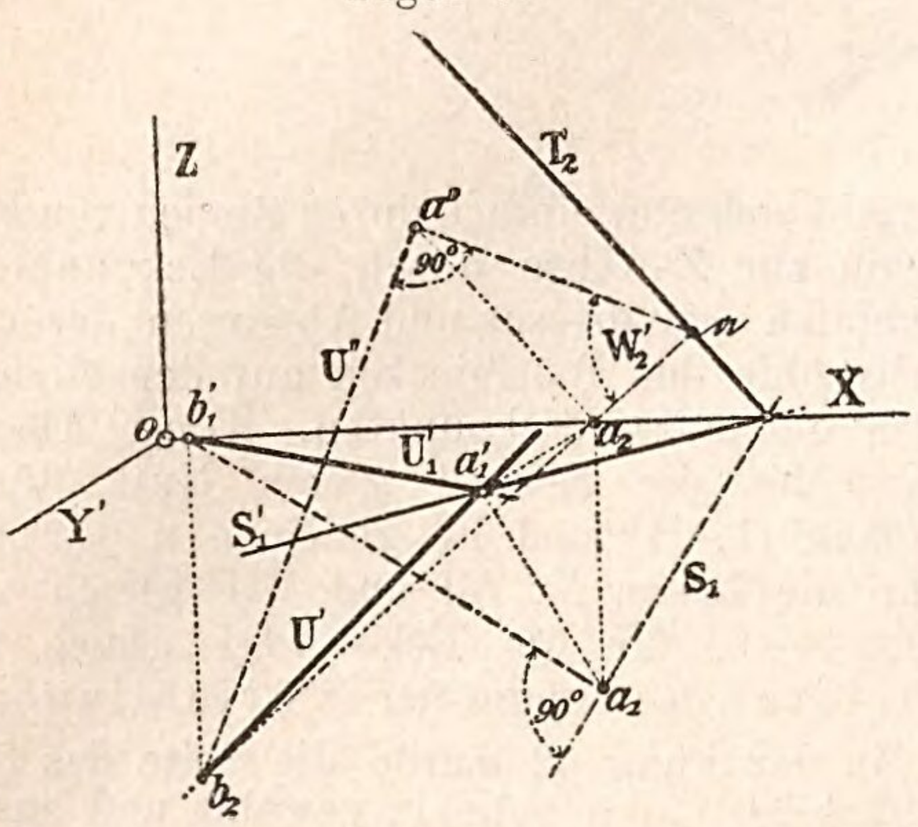
Frage 30. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung durch einen gegebenen Punkt

a) eine Gerade senkrecht zu einer Ebene,

b) eine Ebene senkrecht zu einer Geraden?

Erkl. 33. Vollendet man das Viereck $a_2 a'' d'' \mathfrak{a}$, das Ziehen einer Parallele durch $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{b}b''$, so gibt die Strecke $\overline{a'' d''}$ die Entfernung des Punktes a von der Ebene ST in wahrer Grösse an.

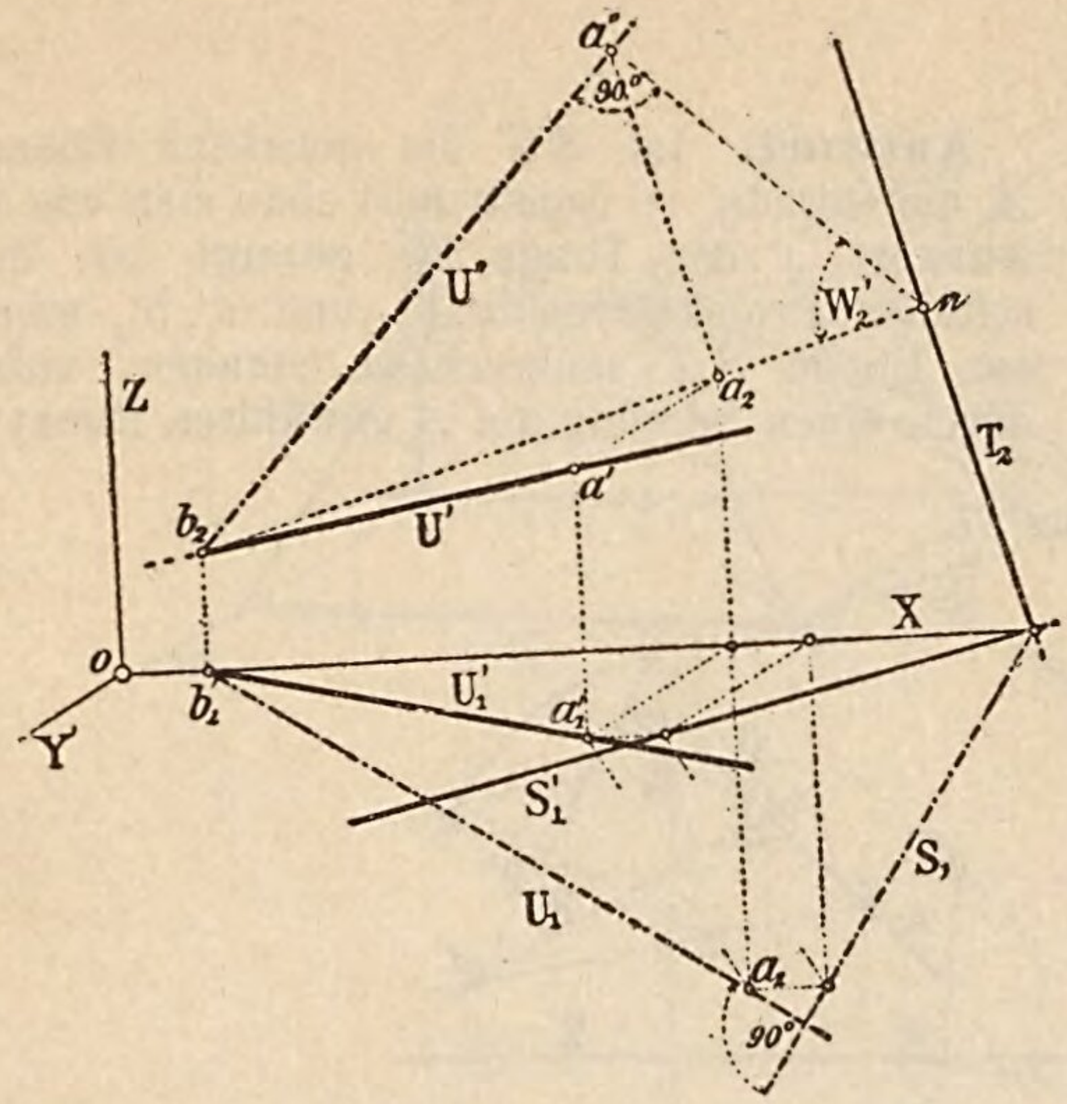
Figur 53.



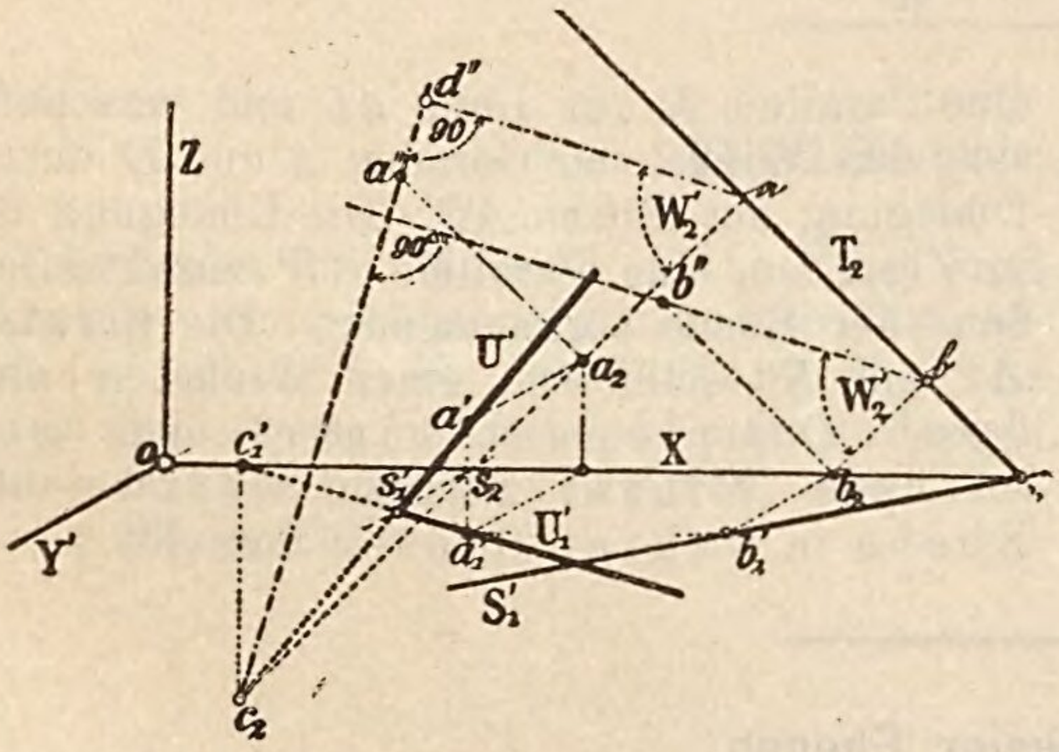
Antwort a. Ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben und man will sich zunächst nur die Projektionsrichtungen einer zur Ebene senkrechten Geraden verschaffen, so wähle man in der Ebene, etwa gleich auf der ersten Spur S'_1, siehe Figur 53, einen Punkt a'_1 beliebig, ermittele dessen rechtw. Projektion a_2 auf X und zeichne das Konstruktionsdreieck $a_2 a'' \mathfrak{a}$ des Punktes a und durch a'' eine Senkrechte zu dessen Hypotenuse $a'' \mathfrak{a}$, so trifft dieselbe die verlängerte Kathete $a_2 \mathfrak{a}$ in einem Punkte b_2 der vertikalen Spur der durch den Punkt a senkrecht zur Ebene ST möglichen Geraden; ihre schiefe Projektion ist somit die Gerade $a'_1 b_2$, ihr schiefer Grundriss die Gerade $a'_1 b'_1$.

Man könnte die Gerade ab aber auch noch auf eine zweite Art erhalten. Benützt man nämlich die rechtw. Projektion S_1 von S und zieht durch die rechtw. Projektion a_1 von a eine Senkrechte zu S_1, so trifft diese die X-Achse in dem Punkt b'_1. Die Parallele durch b'_1 zur Z-Achse schneidet auf der Senkrechten durch a_2 zu T_2 den Punkt b_2 aus.

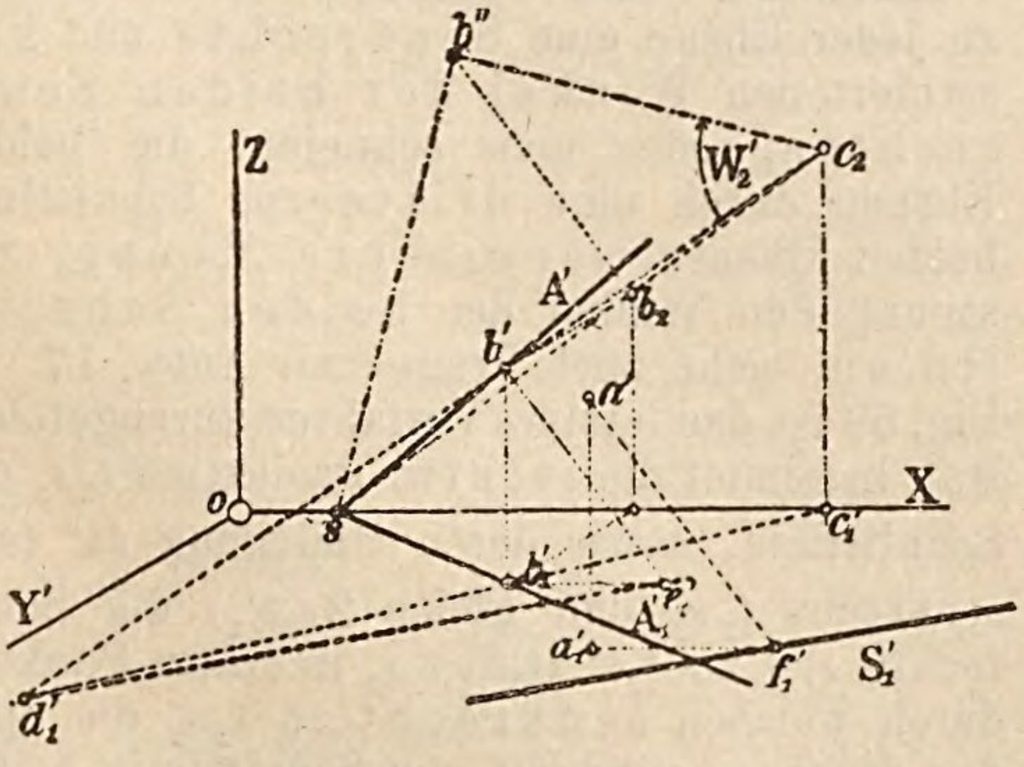
Figur 54.



Figur 55.



Figur 56.



Bestimmt man den Punkt b_2 nach dem ersten, den Punkt b'_1 nach dem zweiten Verfahren, so muss als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung die Verbindungslinie $b_2 b'_1$ parallel zur Z-Achse gerichtet sein.

Soll durch einen beliebigen Punkt a der Ebene, siehe Figur 54, eine Senkrechte zur letzteren gezogen werden, so lässt sich das oben angegebene Verfahren in gleicher Weise anwenden. Man ermittelt wieder die rechtw. Projektionen a_2 und a_1, sowie S_1 von S und bestimmt den Punkt b wie oben angegeben. Die Gerade U, d. h. die Verbindungslinie der Punkte a und b ist die gesuchte Senkrechte. Ist endlich durch einen ganz beliebigen, nicht in der Ebene befindlichen Punkt a, siehe Figur 55, eine Senkrechte zur Ebene zu ziehen, so wählt man einen beliebigen in der Ebene, etwa gleich in S liegenden Hilfspunkt b und zeichnet dessen Konstruktionsdreieck $b_2 b'' \mathfrak{b}$.

Bestimmt man die rechtw. Projektion a_2 von a und zieht durch a_2 die Parallele $a_2 a''$ zu $b_2 b''$ und gleich dem Abstand des Punktes a, ferner durch a'' und a_2 Senkrechte zu $b'' \mathfrak{b}$ und T_2, so schneiden sich dieselben in der Vertikalspur c_2 der gesuchten Senkrechten; letztere ist daher die Gerade ac oder U.

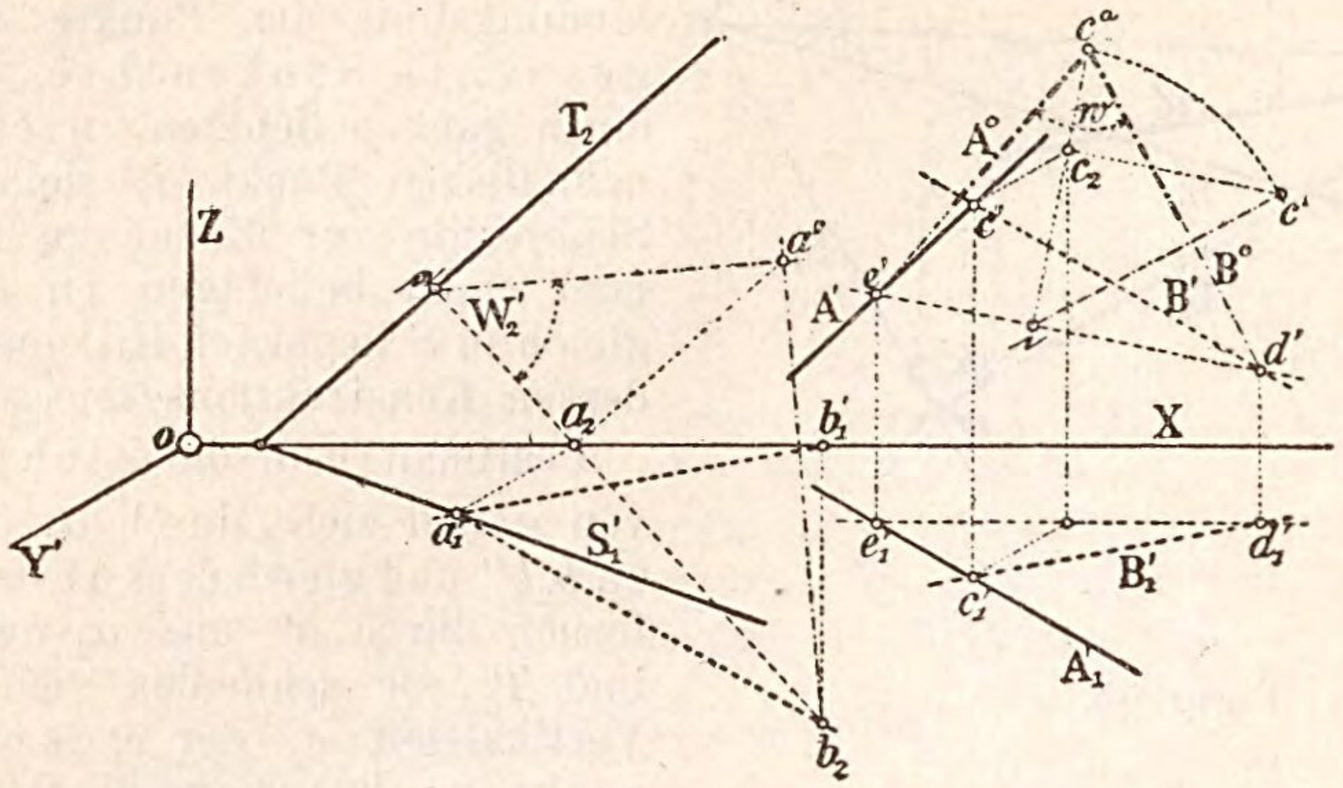
Antwort b. Soll durch einen gegebenen Punkt a, siehe Figur 56, eine Ebene senkrecht zu einer Geraden $A'_1 A'$ gelegt werden, so kann dies durch Umkehrung des in Auflösung a beschriebenen Verfahrens sehr einfach geschehen. Man wählt auf der gegebenen Geraden A einen Punkt b willkürlich, bestimmt dessen rechtw. Projektion, sowie die rechtw. Projektion $b_2 s$ von A (NB. die X-Achse wurde in Figur 56 der Einfachheit wegen, gleich durch den Punkt s, den Schnittpunkt von A' und A'_1 gezogen). Verschafft man sich nun die Umlegung $b'' s$ von A ($\overline{b_2 b''} = \overline{2\, b_2 b'}$ und senkrecht $b_2 s$) und zieht $b'' c_2$ senkrecht zu $b'' s$, so geht durch c_2 senkrecht zu $b_2 s$ die zweite Spur der gesuchten Ebene. Da im vorliegenden Fall der Schnittpunkt der zweiten Spur mit der X-Achse über die zulässige Grenze der Zeichnung hinausfällt, so hat man die erste Spur S'_1 unabhängig von der zweiten Spur zu bestimmen, zu welchem Zwecke man sich zunächst die schiefen Projektionen $b' c_2$ und $b'_1 c'_1$ der Geraden bc und damit auch ihre erste Spur d'_1, sowie die Spur e'_1 einer zweiten zur vertikalen Spur parallelen Geraden be verschafft. Die erste Spur S'_1 der gesuchten Ebene geht nun durch die erste Spur f'_1 einer zur vertikalen Spur parallelen Geraden af parallel zur Verbindungslinie $d'_1 e'_1$.

g) Winkel einer Geraden und einer Ebene.

Frage 31. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung den Winkel einer Geraden mit einer Ebene?

Antwort. Ist ST die gegebene Ebene, A die Gerade, so konstruiert man sich wie in Antwort a der Frage 30 gezeigt ist, die schiefen Projektionen $a'_1 b_2$ und $a'_1 b'_1$ einer zur Ebene ST senkrechten Geraden, zieht durch einen beliebig auf A gewählten Punkt c

Figur 57.



eine Parallele B zur Linie ab und verschafft sich den Winkel der Geraden A und B durch Umlegung der Ebene AB. Die Umlegung ist in Figur um eine Parallele $e'd'$ zur zweiten Spur der Ebene vorgenommen. Die Geraden A^0 und B^0 schliessen einen Winkel w ein, dessen Complementswinkel den gesuchten Winkel zwischen Gerade und Ebene in wahrer Grösse darstellt.

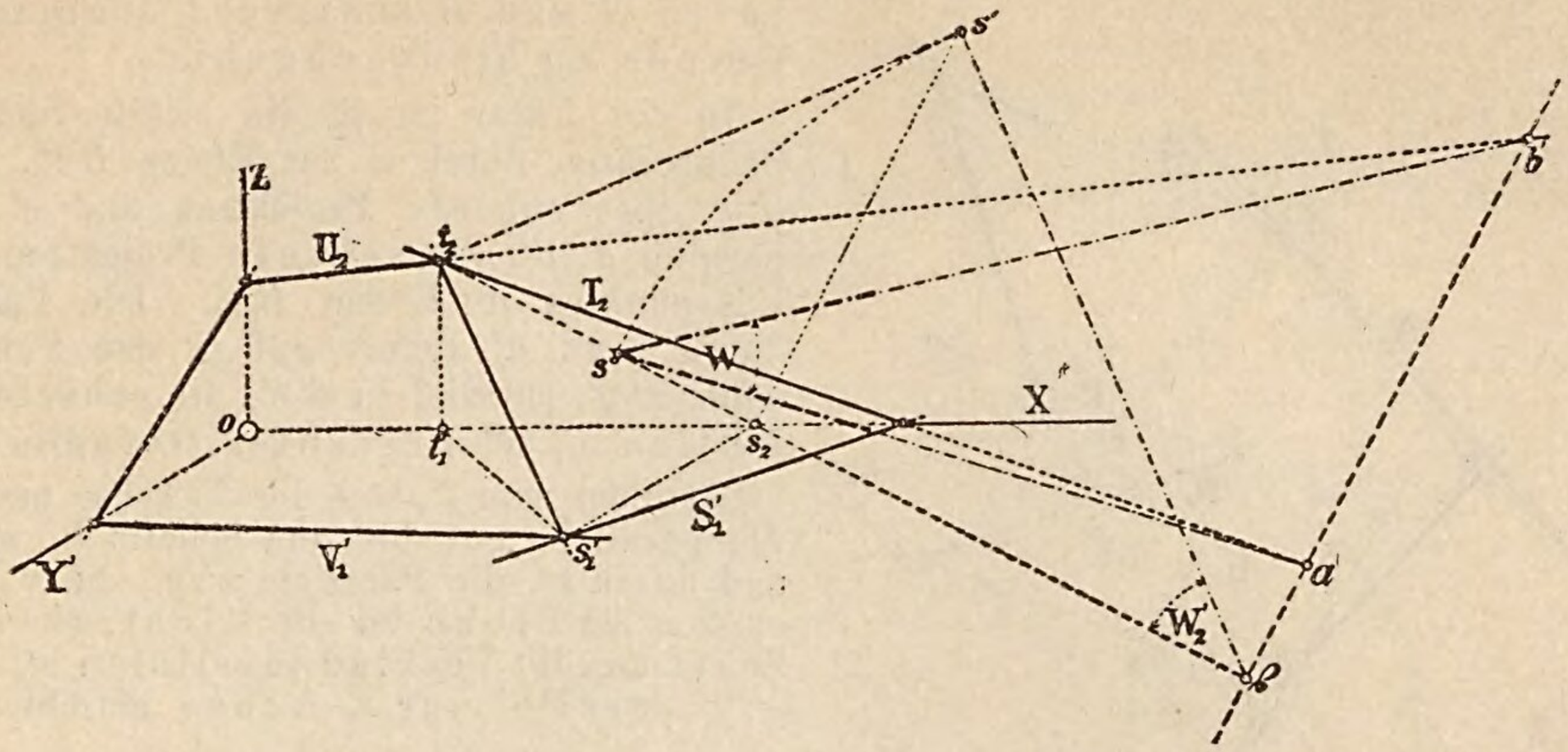
---

h) Winkel zweier Ebenen.

Frage 32. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung den Winkel zweier Ebenen?

Antwort. Man verschafft sich entweder zu jeder Ebene eine Senkrechte und konstruiert den Winkel der beiden Senkrechten, oder man schneidet die beiden Ebenen durch eine dritte zur Schnittlinie beider Ebenen senkrechte Ebene, bestimmt den Winkel der beiden Schnittlinien, siehe auch Frage und Antw. 17. In Fig. 58 ist das letztere Verfahren durchgeführt. Man bestimmt die rechtw. Projektion $t_2 s_2$ der Schnittlinie, sowie deren Umlegung ts^0 ($s_2 s^0$ senkrecht $t_2 s_2$ und gleich $\overline{2 s_2 s'_1}$) die Senkrechte $s^0 \mathfrak{S}$ zu $t_2 s^0$ trifft $t_2 s_2$ in einem Punkt $\mathfrak{S}$, durch welchen senkrecht zu $t_2 s_2$ die Spur der durch s senkrecht zur Schnittlinie beider

Figur 58.



Ebenen gelegten Ebene hindurchgeht, sie schneidet die Spuren beider Ebenen in den Punkten a' und b', welche den genannten Schnittlinien angehören. Die Umlegung des Schnittdreiecks $s\,a'\,b'$ gelangt nach $s^0\,a'\,b'$ und letzteres Dreieck enthält bei s^0 den gesuchten Winkel W beider Ebenen.

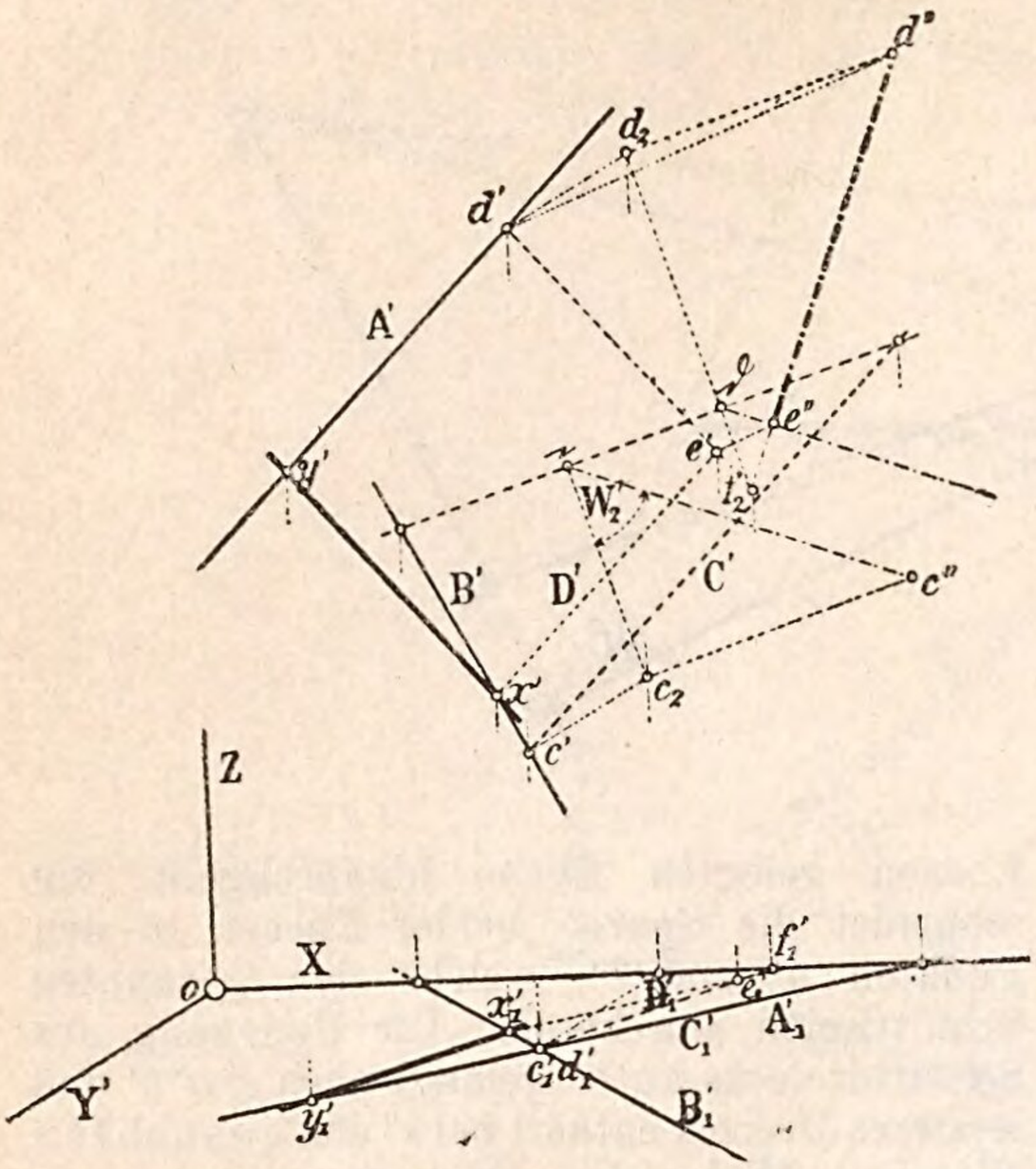
Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 33. Man soll die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden A und B, sowie jene Gerade konstuieren, welche die Geraden A und B senkrecht schneidet, vergl. Aufgabe 23, I. Teil.

Auflösung. Der Lösungsweg bleibt der gleiche, wie in Aufgabe 23, I. Teil, d. h. man wählt auf einer der Geraden etwa B einen Punkt c beliebig, zieht durch ihn eine Parallele C zu A und bestimmt nun die Entfernung eines beliebigen Punktes d der Geraden A von der Ebene $B\,C$. Zu diesem Zwecke bestimmt man sowohl c_2 als auch die zweite Spur der Ebene $B\,C$ und das Konstruktionsdreieck $c_2\,c\,c''$ des Punktes C. Zieht man nun durch die rechtw. Projektion d_2 von d (d'_1 wurde der Einfachheit wegen im Schnittpunkt von A'_1 und B'_1, d. h. zusammenfallend mit c'_1 gewählt) die Senkrechte $d_2\,\mathfrak{d}$ zur Spur der Ebene $B\,C$ und durch $\mathfrak{d}$ eine Parallele zu $c\,c''$, so gibt die Senkrechte $d''\,e''$ (d'' gleich Umlegung von d) den gesuchten kürzesten Abstand der Geraden A und B in wahrer Grösse an.

Zieht man durch den Schnittpunkt e der Senkrechten durch d zur Ebene $B\,C$ eine Parallele D zu A, so trifft diese die Gerade B in einem Punkte x, durch welche parallel

Figur 59.



Aufgabe 34. Ein senkrechter Kreiskegel soll mit seiner Grundfläche in einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene aufliegen. Höhe und Halbmesser des Grundkreises des Kegels sind bekannt. Man soll den Kegel in schiefer Projektion darstellen und die auftretenden Schattengrenzen konstruieren.

Erkl. 34. Da im vorliegenden Falle die Affinitätsrichtung $m^0 m'$ nur wenig von der Richtung $c' d'$ abweicht, so erhält man die Punkte c' und d' genauer durch Abtragen der Strecken $m'' c''$ und $m'' d''$ gleich $\overline{m^0 c^0}$ und Ziehen von Parallelen durch die Punkte c'' und d'' zur Linie $m'' m'$. Das gleichschenklige Dreieck $c'' s'' d''$ stellt die rechtw. Projektion des Kegels in eine Ebene senkrecht zur Spur T der Grundebene dar.

Erkl. 35. Die genaue Ermittelung der Berührpunkte der Tangenten von s' und σ' an die Kegelellipse kann nach dem in Auflösung a der Aufgabe 65, I. Teil, angegebenen Verfahren, und zwar gleich mit Benützung des Kreises um m', vorgenommen werden, indem man s' und σ' als Punkte des Systemes $a' b' c'$ betrachtet, die ihnen affin entsprechenden Punkte s^0 und σ^0 im Kreissystem bestimmt, von letzteren Punkten Tangenten an den Kreis zieht, und deren Berührpunkte auf die Ellipse $a' b' \ldots$ affin überträgt.

zu de die gesuchte, die beiden Geraden A und B senkrecht schneidende Gerade xy hindurchgeht.

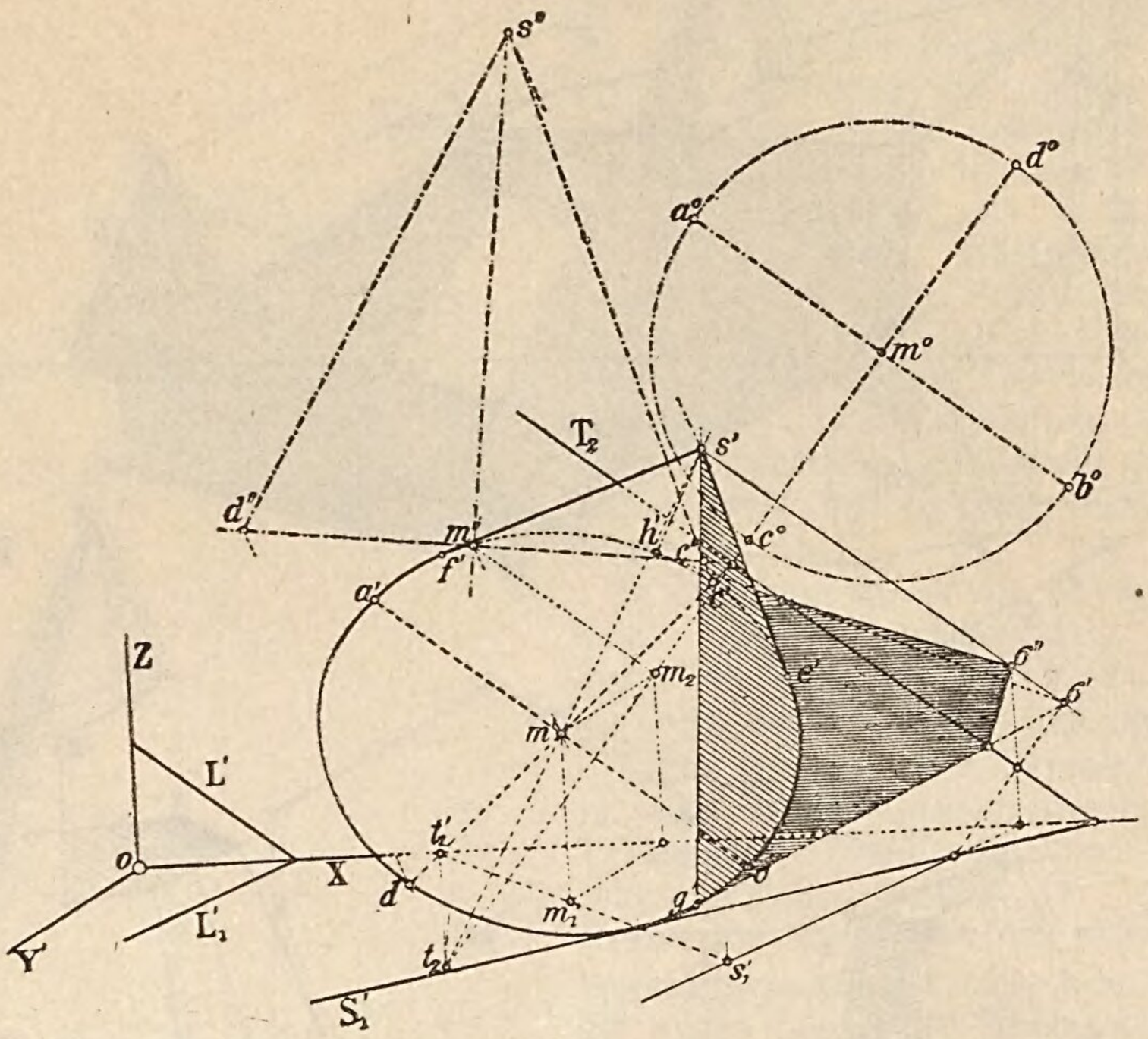
In der Figur ist f_2 die zweite Spur der Senkrechten durch d zur Ebene BC, daher $d' f_2$ ihre schiefe Projektion und e' ($e'' e'$ parallel $d'' d'$) die schiefe Projektion ihres Fusspunktes in Ebene BC. Die Parallele durch e' zu A' liefert auf B' den Punkt x', daher $x' y'$, parallel zu $d' e'$, die schiefe Projektion x' der gesuchten Geraden.

Bestimmt man f'_1 auf der X-Achse und zieht D'_1 parallel zu A' bis zum Schnitt x'_1 mit B'_1 und durch x'_1 die Parallele $x'_1 y'_1$ zu $d'_1 f'_1$, so müssen als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung die Verbindungslinien $x'_1 x'$ und $y'_1 y'$ parallel zur Z-Achse gerichtet sein.

Auflösung. Ist durch $S'_1 T_2$, siehe Figur 60, die Ebene und durch $m'_1 m'$ der Mittelpunkt des Grundkreises gegeben, so lege man die Ebene um ihre Spur T_2 in die **Pr. Eb.** E_2 um, so dass der Punkt m nach m^0 zu liegen kommt und zeichne den Grundkreis in der Umlegung; seine schiefe Projektion ist eine Ellipse, von der sich unmittelbar zwei konjugierte Durchmesser $\overline{a' b'}$ und $\overline{c' d'}$ entsprechend den Kreisdurchmessern $\overline{a^0 b^0}$ und $\overline{c^0 d^0}$, von denen der eine parallel, der andere senkrecht zu T_2 läuft, konstruieren lassen, siehe Erkl. 34. Errichtet man ferner in m'' die Senkrechte $\overline{m'' s''}$ zur Hypotenuse des Konstruktionsdreiecks des Punktes m und gleich der gegebenen Kegelhöhe, so entspricht dieser Linie als schiefe Projektion die Gerade $f_2 m' s$, gehend durch die Spur t_2 der Kegelachse. Die schiefe Projektion der Kegelspitze ergibt sich einfach mittels einer Parallelen durch s'' zu $m' m''$. Die Tangenten von s' an die schiefe Projektion des Kegelkreises, siehe Erkl. 35, vervollständigen die schiefe Projektion des Kegels.

Bestimmt man nun den Schnittpunkt σ des durch $s'_1 s'$ gehenden Lichtstrahles (Lichtrichtung gegeben durch $L'_1 L'$), so begrenzen die Tangenten von σ' an die Kegelellipse den Schlagschatten des Kegels auf die Ebene $S T$, während durch die die Berührpunkte

Figur 60.

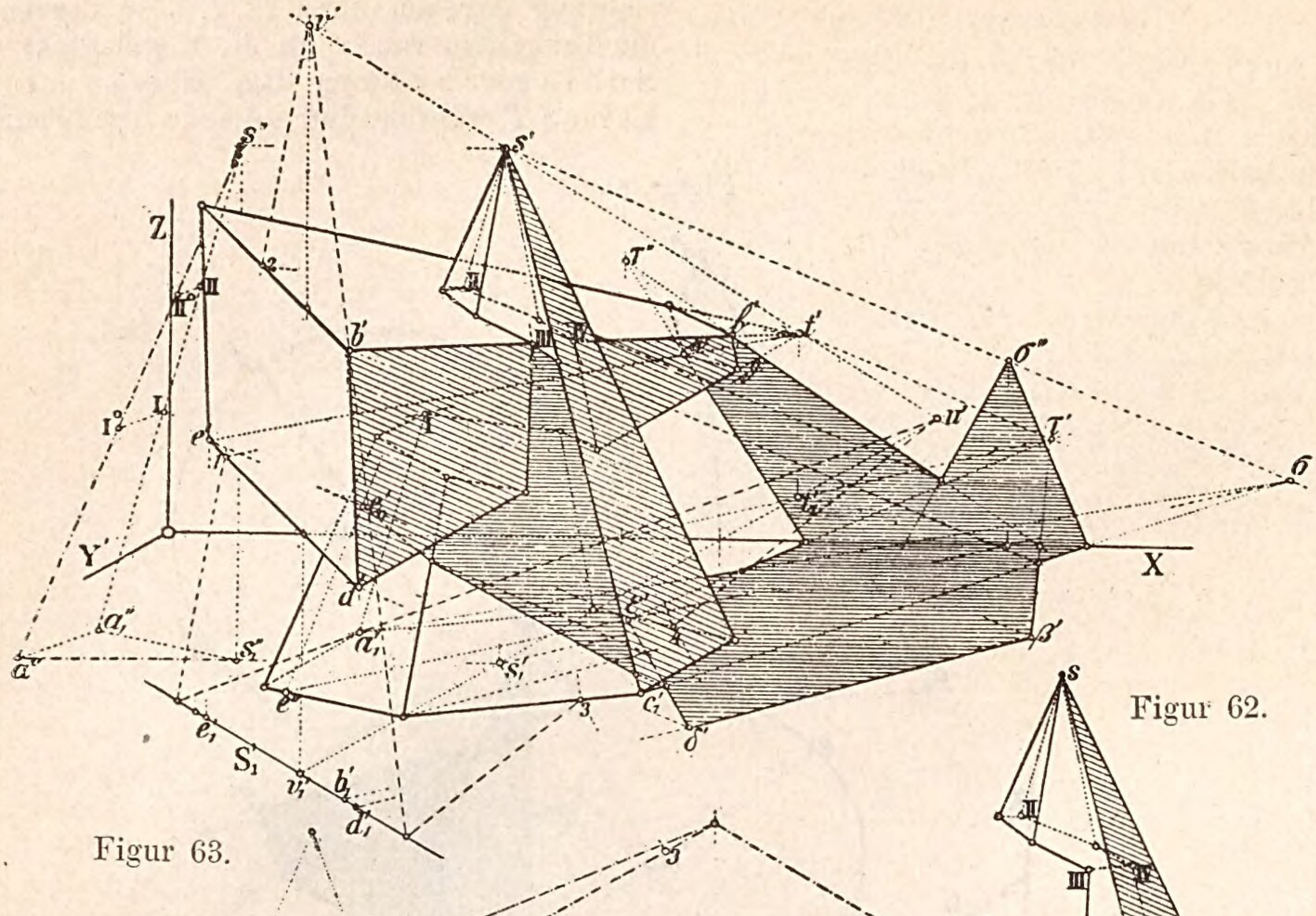


g' und h' enthaltenden Kegelmantellinien $g' s'$ und $h' s'$ der Selbstschatten des Kegels abgegrenzt wird. Wie die Figur 60 zeigt fällt ein Teil des Schattens des Kegels auf die **Pr. Eb.** E_2. Letzterer Schatten wird begrenzt durch die Verbindungslinien des Schnittpunktes σ'' des Lichtstrahls durch s mit der **Pr. Eb.** E_2 mit den Schnittpunkten der zweiten Spur T_2 und den Tangenten $g' \sigma'$ und $h' \sigma'$.

Aufgabe 35. Zwei Pyramiden, welche mit ihren Grundflächen bezw. in der **Pr. Eb.** E_1, sowie in einer zur letzteren senkrechten Ebene liegen, durchdringen sich. Es ist der Durchschnitt beider Pyramiden, sowie die Schattenkonstruktion an denselben auszuführen.

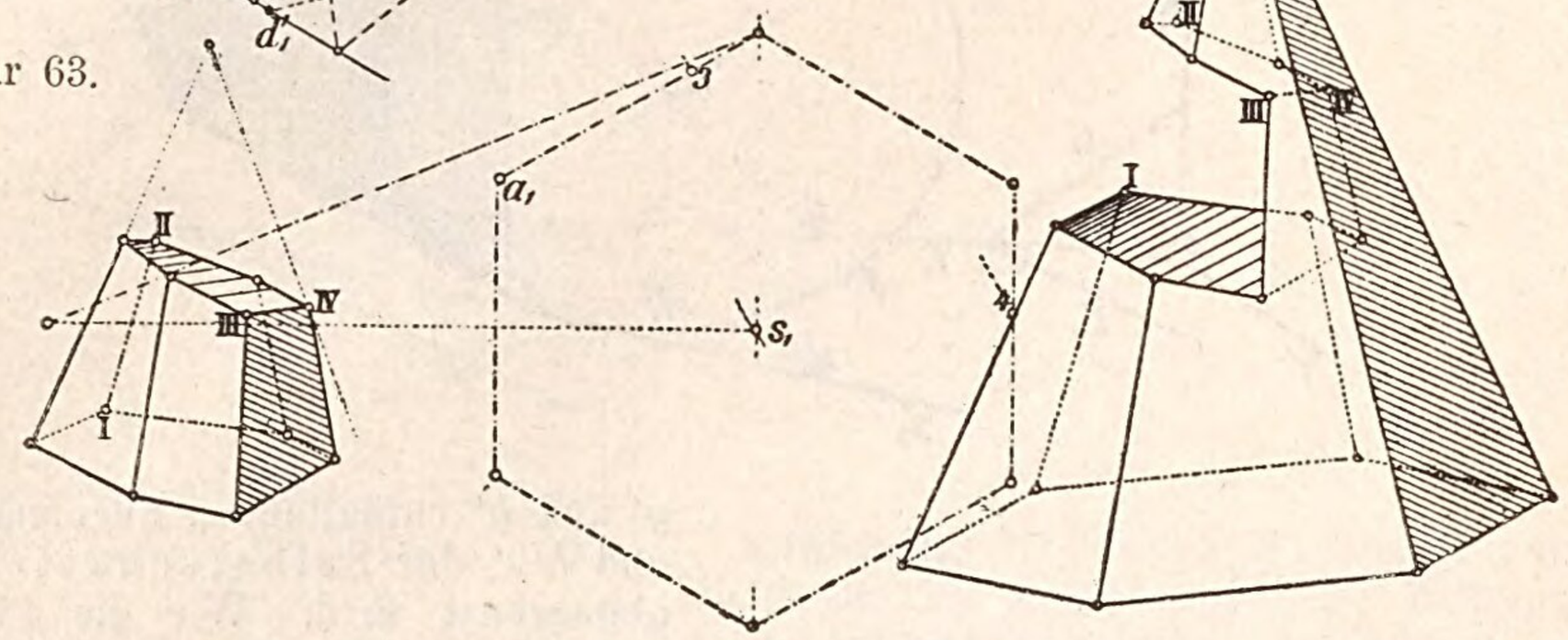
Auflösung. Die Darstellung der Pyramide $a'_1 c'_1 s'$ geschieht wie in Aufgabe 29, mit Zuhilfenahme ihres rechtwinkligen Grundrisses. Für die zweite Pyramide soll die Grundfläche in einer Ebene mit der ersten

Figur 61.



Figur 63.

Figur 62.



Figur 64.

Spur S'_1 sich befinden. Es können somit die schiefen Projektionen der Ecken beliebig gewählt werden, wenn nur die schiefen Grundrisse auf S'_1 liegen. Die Durchführung der Konstruktion der Schnittfigur ist nur in gleicher Weise anzunehmen, wie in der betr. Aufgabe des II. Teils. Die Verbindungslinie st der beiden Pyramidenspitzen schneidet die Grundflächenebenen in den Punkten u' und v'. Führt man nun durch die Pyramidenkante sa eine die Gerade st enthaltende Ebene, so schneidet diese die Grundflächen beider Pyramiden nach den auf der Geraden S'_1 sich schneidenden Geraden $u'a'_1$ und $v'1,2$, gehend durch die Punkte u' und v'. Die Geraden $t'1$ und $t'2$ liefern auf $s'a'_1$ die Schnittpunkte I und II beider Pyramiden. In der Figur ist ausserdem die Konstruktion der Punkte III und IV angedeutet. Die Verbindung der einzelnen Schnittpunkte zur Schnittlinie geschieht nach dem in Erkl. 56, II. Teil, angegebenen Verfahren.

In der Figur 62 ist die eine Pyramide, nach Hinwegnahme der andern, in Figur 63 das beiden Pyramiden gemeinsame Körperstück dargestellt.

Figur 64 zeigt den durchschnittenen und in eine Ebene ausgebreiteten Mantel der Pyramide s. Die Konstruktion ist gleichfalls sehr einfach; mittels der rechtwinkligen Grundrisse ergibt sich die wahre Länge der Seitenkanten, ausserdem ist in der Strecken $\overline{s''a^0}$ die wahre Länge der Seitenkanten der Pyramide nach dem dritten Konstruktionsverfahren, siehe Antwort der Frage 22, ermittelt (es ist die Linie $s's'_1$ parallel zu sich selbst und parallel zur **Pr. Eb.** E_2 nach $s''s''_1$ verschoben, $\overline{s_1''a^0}$ parallel zur X-Achse und gleich $\overline{s_1'a_1'}$, $\overline{s''a^0}$ gleich wahre Länge von $\overline{sa}$ gleich der Strecke sa in Figur 64). Zur Uebertragung der Schnittfigur hat man die Entfernungen der Schnittpunkte von der Pyramidenspitze in wahrer Grösse zu bestimmen und auf den bezüglichen Mantellinien aufzutragen (Figur 61 zeigt die Ermittelung der wahren Länge der Strecken sI und $\overline{s\text{II}}$; es ist $\overline{s''_1a''_1}$ gleich und parallel $\overline{s'_1a'_1}$, $\overline{s''\text{I}} = \overline{s'\text{I}}$, $\overline{s''\text{II}} = \overline{s'\text{II}}$, $\overline{\text{I}\,\text{I}^0}$ und $\overline{\text{II}\,\text{II}^0}$ parallel $a_1''a^0$. $\overline{s''\text{I}^0}$ und $\overline{s''\text{II}^0} = \overline{s\text{I}}$ und $\overline{s\text{II}}$ der Figur 64).

Was die Schattenkonstruktion anbetrifft, so konstruiert man den Selbst- und Schlagschatten der Pyramide s' . . . wie in Aufgabe 30 und erhält als Selbstschattengrenze die Linien $s'a'_1$ und $s'c'_1$, als Schlagschatten auf die **Pr. Eb.** E_1 die Linien $\sigma a'_1$ und $\sigma c'_1$, welche die X-Achse in Punkten treffen, die

mit σ'' dem Schlagschatten von s auf die **Pr. Eb.** E_2 zu verbinden sind.

Zur Bestimmung der Schatten für die zweite Pyramide ermittele man zunächst die zweite Spur τ'' des Lichtstrahles durch t und ziehe von τ'' an die zweite Spur $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'$ . . . der Pyramide die Streifstrahlen $\tau''\mathfrak{d}'$ und $\tau''\mathfrak{e}'$ so sind hiemit die Linien $t'e'$ und $t'b'$ der Selbstschattengrenze bestimmt. Als Schlagschatten derselben auf die **Pr. Eb.** E_1 erscheinen die Linien $\tau'\beta'$ und $\tau'\mathfrak{e}'$, welche die X-Achse in Punkten schneiden, die mit τ'' verbunden den Schlagschatten der Pyramide auf die **Pr. Eb.** E_2 begrenzen. Es erübrigt noch die Bestimmung des Schlagschattens δ' von d auf die **Pr. Eb.** E_1, sowie jene des Schlagschattens der Pyramide t' . . . auf die Pyramide s'_1 . . . Die Konstruktion ist für den Punkt e'_0 ausgeführt. Man zieht durch ε, nach σ, welche Linie den Punkt e'' enthält, welcher mit s' verbunden den Lichtstrahl durch e' in dem Schlagschatten e'_0 des Punktes e' auf die Pyramide s' . . . trifft.

Anmerkung 5. Mit Hilfe des Vorangegangenen lassen sich nunmehr sämtliche Aufgaben, bei welchen es sich um die gegenseitigen Lagen- und Massverhältnisse der Raumgrössen Punkt, (gerade) Linie und (ebene) Fläche handelt, in schiefer Projektion unter Zugrundelegung der **Pr. Ebn.** E_1, E_2 und E_3 konstruktiv durchführen. Man versuche die in den Bänden I und II des Projektionszeichnens enthaltenen Aufgaben unter Anwendung obengenannter Projektionsmethode zu lösen.

---

4) Ueber die Centralprojektion.

A) Ueber die Centralprojektion im allgemeinen.

Frage 33. Was versteht man unter der centralen Projektion einer Raumgrösse?

Antwort. Denkt man sich durch sämtliche Punkte einer Raumgrösse gerade Linien nach einem willkürlich angenommenen Punkte gezogen und deren Schnittpunkte mit der **Pr. Eb.** aufgesucht, so bildet die Gesamtheit aller so erhaltenen Punkte die centrale Projektion der Raumgrösse auf die **Pr. Eb.**

Ist z. B., siehe Figur 65, ein Punkt a im Raume beliebig gegeben und zieht man durch a nach dem willkürlich gewählten Punkte o, so durchschneidet die Gerade oa die **Pr. Eb.** E_2 in einem Punkte a', der centralen Projektion des Punktes a.

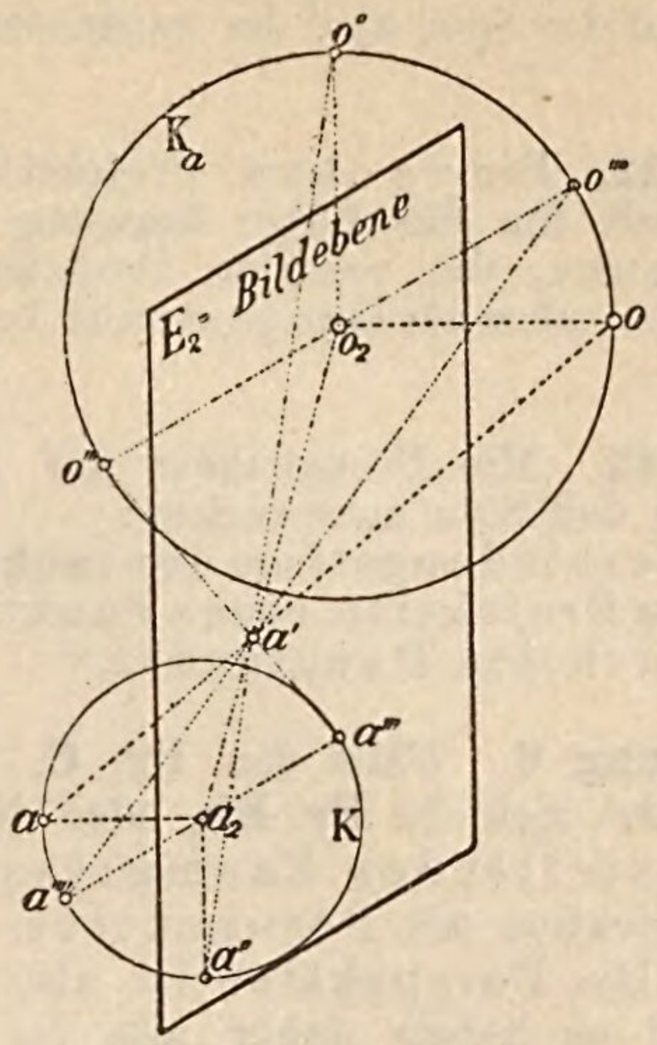
Erkl. 36. Der Punkt o, durch welchen die Projektionsstrahlen oder die central Projizierenden zu ziehen sind, heisst das Projektionscentrum oder der Projektionsmittelpunkt oder auch kurzweg das Centrum der Projektion.

Die **Pr. Eb.** wird bei der Darstellung in centraler Projektion in der Regel als Bildebene bezeichnet und fällt mit der vertikalen **Pr. Eb.** E_2 zusammen.

Erkl. 37. Die centrale Projektion einer Raumgrösse teilt die **Pr. Eb.** in zwei Teile, deren einer Teil die centralen Projektionen sämtlicher Punkte der Raum-

grösse enthält, während die durch die übrigen Punkte der **Pr. Eb.** gezogenen Projizierenden mit der Raumgrösse keine Punkte gemein haben. Die Grenzlinie zwischen beiden Teilen der **Pr. Eb.** heisst nun wieder der scheinbare Umriss der Raumgrösse, siehe auch Erkl. 3.

Figur 65.



Frage 34. Wie bestimmt man die centrale Projektion eines Punktes?

Erkl. 38. Da es nur einen Durchschnittspunkt a' der Projizierenden durch a mit der **Pr. Eb.** gibt, so ist klar, dass die centrale Projektion eines Punktes a im Raume vollständig bestimmt ist, sobald die **Pr. Eb.** E_2 und das Projektionscentrum o gegeben sind.

Erkl. 39. Das Wort „Projektionscentrum“ soll für die Folge abgekürzt mit **Pr. C.** bezeichnet werden.

Frage 35. Wie bestimmt man umgekehrt bei gegebenem **Pr. C.** und gegebener Centralprojektion die Lage eines Punktes im Raume?

Erkl. 40. Die Antworten der Fragen 34 und 35 enthalten folgenden Satz:

„Die centrale Projektion eines Punktes im Raume ist vollständig bestimmt, sobald man die Lage des Punktes im Raume sowie das **Pr. C.** kennt.“

„Umgekehrt ist jedoch durch centrale Projektion und Centrum die räumliche Lage des Punktes nicht festgesetzt, vielmehr muss hiezu noch die rechtw. Projektion des Punktes auf die **Pr. Eb.** gegeben sein.“

Erkl. 41. Durch die vier Punkte o, a', a_2 und a, siehe Figur 65, ist eine Ebene festgelegt, welche sowohl eine central- wie eine rechtw.-

Antwort. Man zieht durch den Punkt a, siehe Figur 65, eine Projizierende und ermittelt deren Durchschnitt a' mit der **Pr. Eb.** „Die centrale Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.“

Antwort. Ist a', siehe Figur 65, die gegebene Projektion und o das **Pr. C.**, so ziehe man durch a' die Projizierende oa'. Nimmt man auf letzterer irgend einen Punkt a ganz beliebig an, so entspricht demselben stets der Punkt a' als centrale Projektion. Will man aber die Lage des Punktes a gegen die **Pr. Eb.** festsetzen, so muss noch eine weitere Bedingung für erstere bekannt sein.

Als solche weitere Bedingung dient zweckmässig die, dass der in Rede stehende Punkt eine vorgegebene rechtw. Projektion a_2 auf der **Pr. Eb.** besitze. Nimmt man nämlich den Punkt a_2 als rechtwinklige Projektion von a in der **Pr. Eb.** ganz beliebig an, so ist hiedurch die räumliche Lage von a vollständig bestimmt, denn die central Pro-

projizierende Ebene ist und aus diesem Grunde auch die rechtw. Projektion o_2 des **Pr. C.**, gelegen auf der Spur $a_2 a'$ der genannten Ebene, enthält.

Erkl. 42. Die rechtw. Projektion o_2 des **Pr. C.** soll für die Folge kurzweg als der Hauptpunkt, die rechtw. Projizierende o_2 des **Pr. C.** o aber als Hauptstrahl bezeichnet werden.

Erkl. 43. Mit Bezugnahme auf Erkl. 20 kann man den Satz aussprechen:

„Die Verbindungslinie der **rechtw.** und **centralen** Projektion eines Punktes geht stets durch den Hauptpunkt."

Anmerkung 6. Fällt das **Pr. C.** mit dem Auge des Beobachters zusammen und befindet sich die **Pr. Eb.** oder die Bildebene zwischen dem Auge und der darzustellenden Raumgrösse, so bezeichnet man diese besondere Art der Centralprojektion als Perspektive.

Die Perspektive ist also nur ein besonderer Fall der Centralprojektion und es haben daher alle im nachfolgenden entwickelten Sätze auch für die Perspektive volle Gültigkeit.

B) Ueber die Darstellung eines Punktes.

Frage 36. Wie wird ein Punkt in centraler Projektion dargestellt?

Antwort. Ein Punkt wird dargestellt durch seine rechtw. und centrale Projektion a_2 bezw. a', siehe Figur **65**, wobei stets die Verbindungslinie $a_2 a'$ durch den Hauptpunkt o_2 gehen muss.

Erkl. 44. Die Länge der Strecke $\overline{o a_2}$, welche die Entfernung des **Pr. C.** von der **Pr. Eb.** bezeichnet, nennt man in der Regel kurzweg die „Distanz" oder auch den „Centrumsabstand" bezw. den „Augabstand."

Erkl. 45. Aus der Figur 65 ist unmittelbar die Aehnlichkeit der Dreiecke $o a_2 a'$ und $a a_2 a'$ zu erkennen. Aus dieser Aehnlichkeit folgt aber die Verhältnisgleichheit:

$$\frac{\overline{o\,o_2}}{\overline{a\,a_2}} = \frac{\overline{o_2\,a'}}{\overline{a_2\,a'}} \quad \ldots \quad 3)$$

d. h. als Satz ausgedrückt:

„Die Centralprojektion eines Punktes a teilt die Verbindungslinie seiner rechtw. Projektion mit dem Hauptpunkt in dem Verhältnis der Abstände des **Pr. C.** und des Punktes a von der **Pr. Eb.**;

oder anders ausgedrückt:

„Die Centralprojektion eines Punktes a ist der Teilungspunkt der Strecke $\overline{a_2 o_2}$ im Verhältnis der Abstände der Punkte a und o von der **Pr. Eb.**"

Dieser Teilungspunkt ist ein innerer, siehe Figur 65, wenn die Punkte a und o auf verschiedenen Seiten, dagegen ein äusserer, wenn a und o auf der gleichen Seite der **Pr. Eb.** liegen.

Anmerkung 7. Die Perspektive eines Punktes ist mit Rücksicht auf Anmerkung 6 stets der innere Teilungspunkt zwischen rechtw. Projektion und Hauptpunkt.

Erkl. 46. Beschreibt man, siehe Figur 65, um o_2 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $o_2 o$ einen Kreis K_a, dessen Ebene eine ganz beliebige Lage hat, also auch mit der **Pr. Eb.** zusammenfallen kann, und um a_2 mit dem Halbmesser $a_2 a$ einen zu K_a parallelen Kreis K, und zieht in beiden Kreisen parallele Halbmesser $o_2 o''$, $o_2 o'''$, $o_2 o''''$ und $a_2 a''$, $a_2 a'''$, $a_2 a''''$ von beliebiger aber entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien $o'' a''$, $o''' a'''$, $o'''' a''''$ stets im Punkte a', denn es finden ja die Verhältnisgleichheiten statt:

$$\frac{o_2 o''}{a_2 a''} = \frac{o_2 o'''}{a_2 a'''} = \frac{o_2 o''''}{a_2 a''''} \ldots = \frac{o_2 a'}{a_1 a'} \ldots \quad 4)$$

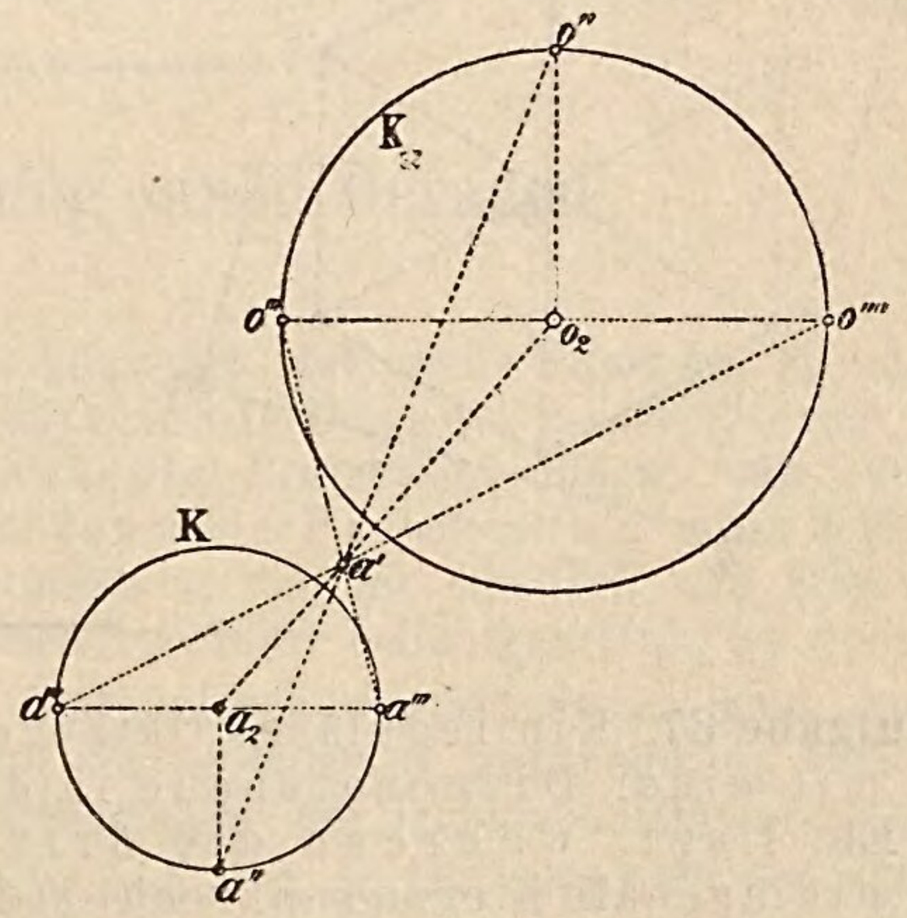
Erkl. 47. Damit die Lage des **Pr. C.** gegen die **Pr. Eb.** bestimmt sei, muss dessen rechtw. Projektion o_2 sowie sein Centrumsabstand oder die Distanz stets gegeben sein. Letzteren Abstand gibt man sich gewöhnlich durch einen in der **Pr. Eb.** liegenden Kreis K_a, den Abstandskreis oder auch Distanzkreis, welcher o_2 als Mittelpunkt und die Distanz als Halbmesser besitzt.

Bei allen folgenden Konstruktionen soll demnach der Punkt o_2, sowie der Abstandskreis K_a als gegeben vorausgesetzt sein.

Frage 37. Wie bestimmt man mit Bezugnahme auf die Erkl. 46 den Abstand eines durch $a_2 a'$, siehe Figur 66, dargestellten Punktes a von der **Pr. Eb.**?

Antwort. Man ziehe im Kreise K_a einen beliebigen Halbmesser $o_2 o''$ oder $o_2 o'''$ oder $o_2 o''''$ und durch a_2 eine Parallele hierzu; die Verbindungslinie $o'' a'$ oder $o''' a'$ oder $o'''' a'$ liefert dann auf der entsprechenden Parallelen durch a_2 den Punkt a'' oder a''' oder $a'''' \ldots$ und es ist die Strecke $a_2 a'' = a_2 a''' = a_2 a''''$ gleich dem gesuchten Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.**

Figur 66.



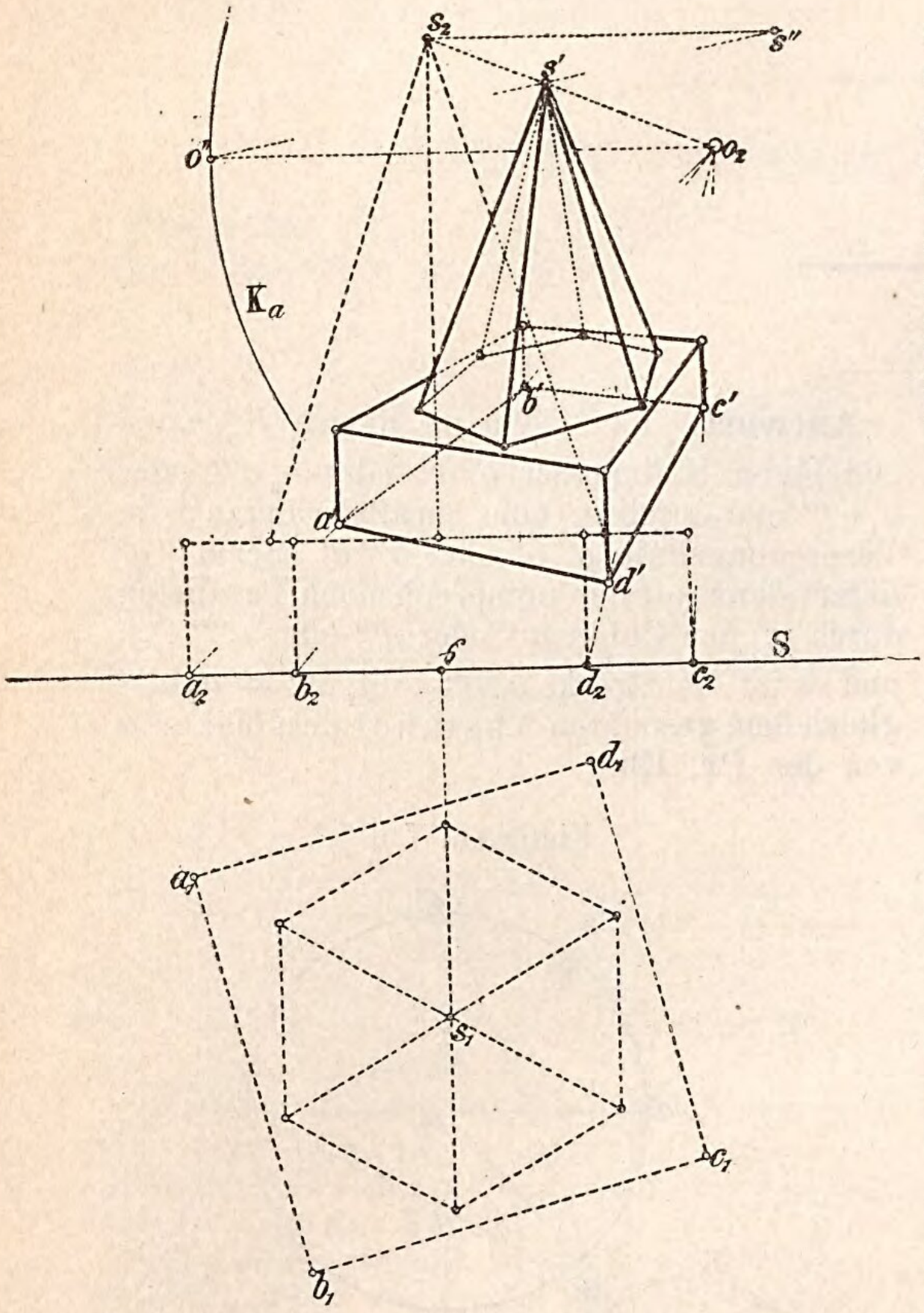
Erkl. 48. Kennt man umgekehrt den Abstand eines Punktes von der **Pr. Eb.**, sowie seine rechtw. Projektion, so lässt sich nunmehr in einfachster Weise seine Centralprojektion ermitteln: Man zieht durch a_2 nach o_2 sowie durch a_2 und o_2 zwei beliebige aber parallele Strahlen $a_2 a''$ und $o_2 o''$ oder $a_2 a'''$ und $o_2 o''' \ldots$ und zwar erstere Linie gleich dem gegebenen Abstande des Punktes a von der **Pr. Eb.**, letztere als Halbmesser von K_a; die Verbindungslinie $a'' o''$ oder $a''' o''' \ldots$ liefert die gesuchte Centralprojektion a' des Punktes a. Bei genannter Konstruktion ist selbstverständlich zu berücksichtigen, ob der räumliche Punkt a mit dem Projektionscentrum auf der gleichen Seite oder auf der entgegengesetzten Seite der **Pr. Eb.** liegt. Im ersten Fall müssen die Linien $a_2 a'' \ldots$ und $o_2 o'' \ldots$ gleichen, im zweiten Fall entgegengesetzten Richtungssinn besitzen.

Anmerkung 8. Auf Grund des in Erkl. 44 Gesagten ist man nunmehr in der Lage, sowohl den Abstand eines Punktes von der **Pr. Eb.** der Grösse nach zu konstruieren, wenn der Punkt durch rechtw. und centrale Projektion gegeben ist, als auch, was das Wichtigste ist, die centrale Projektion bezw. die Perspektive eines jeden Punktes und damit auch jeder Raumgrösse herzustellen, wenn von demselben die rechtw. Projektion, sowie der Abstand bezw. die Abstände der einzelnen Punkte der Raumgrösse von der **Pr. Eb.** der Grösse und dem Sinne bekannt sind. Folgende Beispiele sollen dies zeigen.

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 36. Das in Figur 67 durch seine rechtw. Projektionen gegebene Körpersystem ist in Centralprojektion darzustellen, wenn das **Pr. C.** durch Hauptpunkt o_2 und Abstandskreis K_a gegeben ist.

Fig. 67.

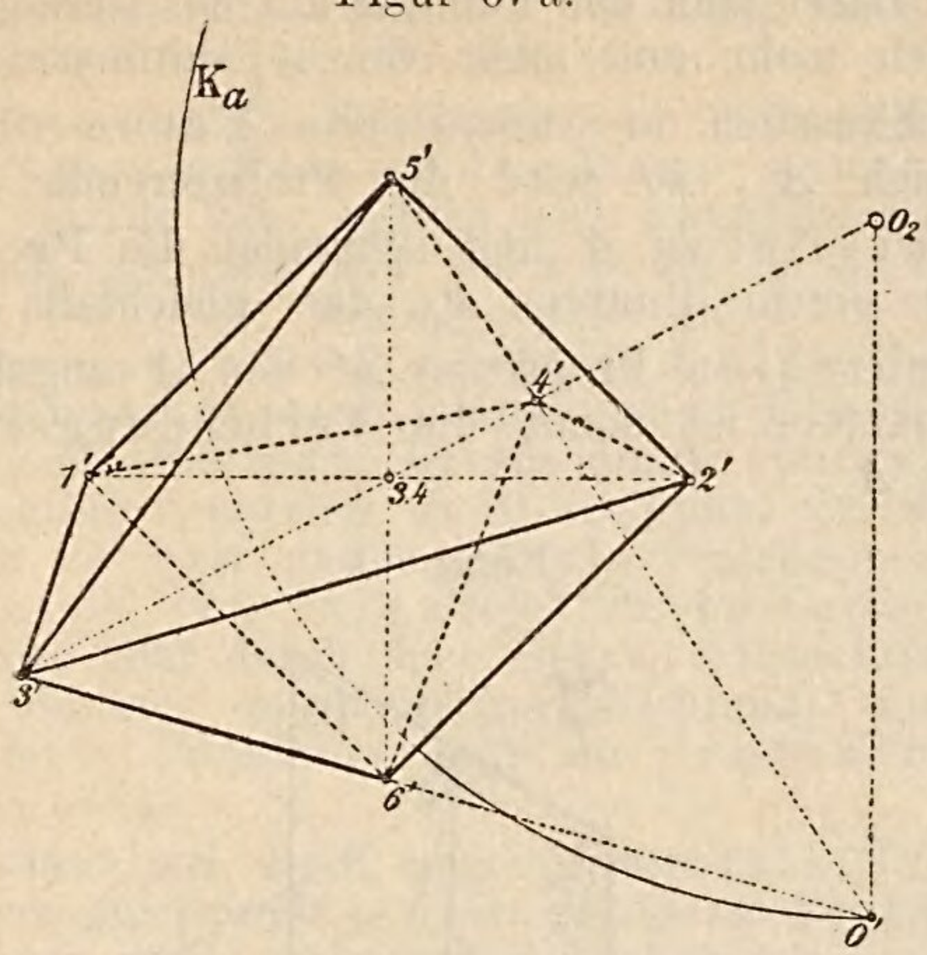


Auflösung. Man bestimme die centrale Projektion jedes einzelnen Eckpunktes nach dem in Antwort der Frage 36 angegebenen Verfahren. In der Figur 67 ist die Konstruktion des Punktes s' angedeutet. Es ist $o_2\,o''$ in beliebiger Richtung und hiezu durch s_2 eine Parallele $\overline{s_2 s''} = \overline{s\,s_1}$ gleich dem Abstande des Punktes s von der **Pr. Eb.** E_2, welche als Bildebene angenommen sein soll, gezogen, die Verbindungslinie $s''\,o''$ liefert die gesuchte centrale Projektion s. In gleicher Weise sind die übrigen centralen Projektionen der einzelnen Eckpunkte des Körpersystems zu bestimmen.

Aufgabe 37. Ein reguläres Oktaëder, das mit einer Diagonalebene in der **Pr. Eb.** liegt, während die dritte Hauptdiagonale hierzu senkrecht steht

ist in centraler Projektion darzustellen.

Figur 67 a.



Auflösung. Die Punkte 1, 2, 5, 6 gehören schon der gesuchten Centralprojektion an und sind deshalb mit 1', 2', 5' und 6' bezeichnet. Die centralen Projektionen der Punkte 3 und 4 erhält man durch Ziehen einer Parallelen $o_2 o'$ durch o_2 zur Linie 5'6' und Verbindung der Punkte 5' und 6' mit o'. Die Längen $\overline{35'}$ und $\overline{46'}$ geben nämlich die Abstände der Punkte 3 und 4 von der **Pr. Eb.** an, wodurch die angeführte Konstruktion gerechtfertigt erscheint.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 38. Man stelle die Centralprojektionen der übrigen regulären platonischen, sowie halb regulären Körper dar, wenn dieselben bei bestimmter Stellung gegen die **Pr. Ebn.** durch ihre rechtw. Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 gegeben sein und der Augpunkt o_2, sowie der Abstandskreis K_a bekannt sein sollen.

Aufgabe 39. Man zeichne die regulären Sternpolyeder in centraler Projektion, wenn deren rechtw. Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 in bestimmter Stellung gegen letztere gegeben sein sollen.

Aufgabe 40. Man zeichne ein reguläres sechsseitiges Prisma (reguläre sechsseitige Pyramide) in centraler Projektion, wenn die Grundfläche in der **Pr. Eb.** E_1 liegen und die rechtw. Projektion des Körpers als bekannt vorausgesetzt sein soll.

Aufgabe 41. Man zeichne einen Kreis in centraler Projektion, wenn dessen Ebene

a) zur **Pr. Eb.** senkrecht steht,

b) eine ganz beliebige Lage hat

und die rechtw. Projektionen des Kreises gegeben sein sollen.

C) Ueber die Darstellung einer Geraden.

Frage 38. Wie wird eine Gerade in centraler Projektion dargestellt?

Erkl. 49. Verbindet man, siehe Figur 68, den Punkt a_2 mit A_s, so stellt diese Verbindungslinie die rechtw. Projektion A_2 von A dar und es sind zufolge des Parallelismus der Linien A und $oA_{q'}$, aa_2 und ao_2 die Ebenen der Dreiecke aa_2A_s und $oo_2A_{q'}$, daher auch die Linien $A_s a_2$ oder A_2 und $o_2 A_{q'}$ parallel.

Antwort. Ist, siehe Figur 68, A die darzustellende Gerade, so erhält man deren centrale Projektion, indem man zunächst die centrale Projektion a' eines beliebigen Punktes a von ihr ermittelt und hierauf die eines zweiten beliebigen Punktes von A.

Statt diesen zweiten Punkt ganz beliebig auf der Geraden A anzunehmen, kann man insbesondere den Durchschnittspunkt A_s von A mit E_2, d. h. die „Spur“ der Geraden

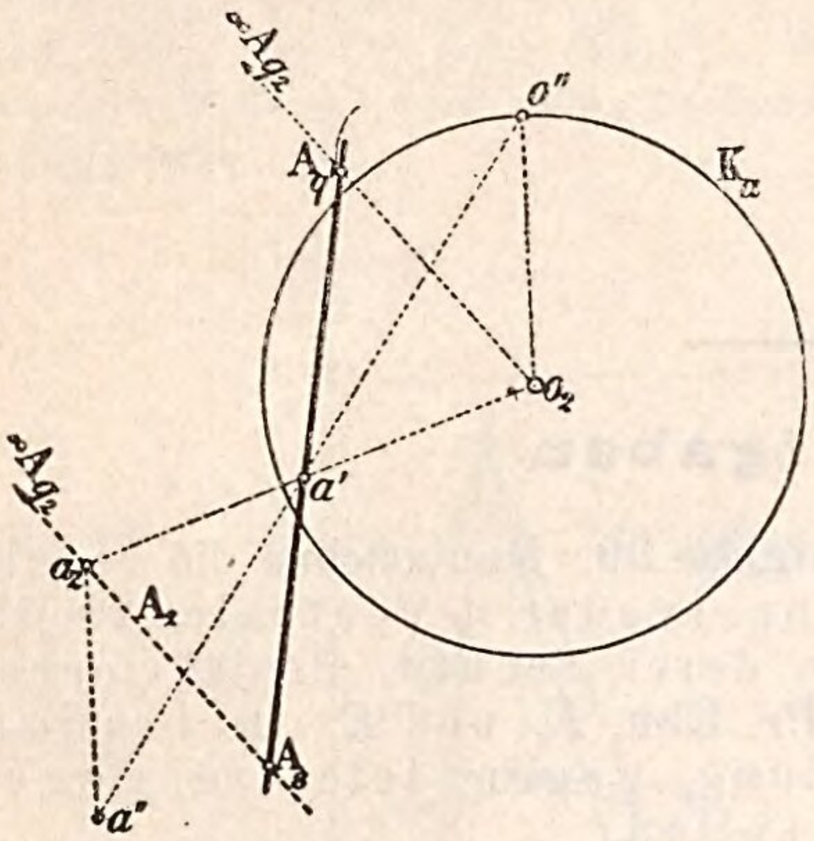
Das eben Gesagte enthält aber folgende wichtige Sätze:

„Die rechtw. Projektion A_2 einer Geraden A_1 geht durch die Spur von A und läuft parallel zur Verbindungslinie des Fluchtpunktes der Geraden mit dem Hauptpunkt;“

oder anders ausgedrückt:

„Die rechtwinklige und centrale Projektion einer Geraden schneiden sich stets in der Spur der Geraden.“

Figur 68.

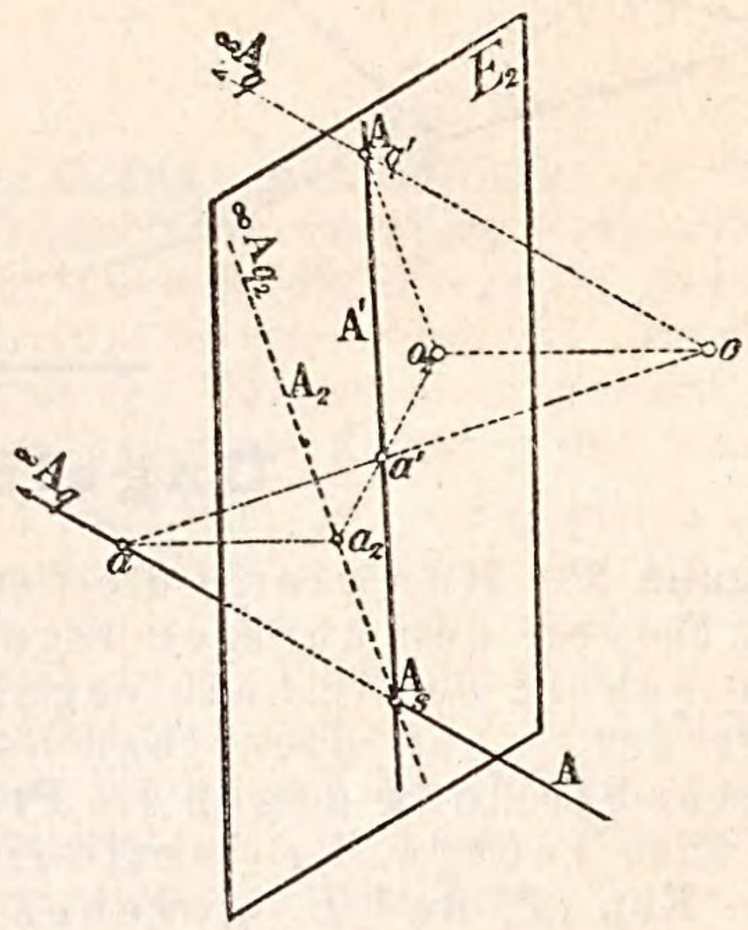


Mittels der eben genannten Sätze ist man im stande, die rechtw. Projektion einer Geraden zu ermitteln, sobald deren centrale Projektion gegeben ist, bezw. den Fluchtpunkt einer Geraden zu bestimmen, wenn man rechtw. und centrale Projektion kennt. Denn ist z. B., siehe Figur 68, von einer Geraden A ihre Spur A_s und Flucht $A_{q'}$ gegeben, so hat man durch A_s eine Parallele zu $o_2 A_{q'}$ zu ziehen, um die rechtw. Projektion A_2 zu erhalten. Kennt man aber die Geraden A_2 und A', so liefert eine Parallele durch o_2 zu A_2 auf A' den Fluchtpunkt $A_{q'}$ der Geraden A.

wählen. Durch A_s und a' ist die centrale Projektion von A vollständig bestimmt.

Lässt man den Punkt a auf der Geraden A sich mehr und mehr von A_s entfernen und schliesslich in unendliche Ferne rücken nach A_q, so wird die Projizierende $o A_{q'}$ parallel zu A und schneidet die **Pr. Eb.** in einem Punkte $A_{q'}$, der gleichfalls der centralen Projektion A' von A angehört. Letztere ist somit die Verbindungslinie $A_s A_{q'}$.

Eigur 69.



Der Punkt $A_{q'}$, d. h. die centrale Projektion des unendlich fernen Punktes der Geraden A heisst der „Fluchtpunkt“ oder kurzweg die „Flucht“ der Geraden A. Man kann somit folgenden Satz aussprechen.

„Eine Gerade wird in centraler Projektion dargestellt entweder durch zwei beliebige Punkte derselben oder aber durch ihre Spur und die centrale Projektion ihres unendlich fernen Punktes, d. h. ihre Flucht.“

Erkl. 50. Hat eine Gerade eine besondere Lage gegen die **Pr. Eb.**, so wird dies auch bezüglich der in Antwort der Frage 38 genannten besonderen Punkte, nämlich ihrer Spur und Flucht, der Fall sein.

Eine Gerade kann eine central Projizierende sein, d. h. durch das **Pr. C.** gehen; in diesem Fall decken sich Spur und Flucht; eine solche Gerade besitzt als centrale Projektion einen Punkt, durch welchen zugleich die räumliche Lage der Geraden vollständig festgelegt ist, denn durch den genannten Punkt ist nur eine einzige Gerade nach dem **Pr. C.** möglich. Eine Gerade kann ferner zur **Pr. Eb.**

senkreckt stehen, wie z. B. die Geraden A oder B oder C, siehe Figur 70 und 71; in diesem Fall ist der Parallelstrahl durch o die rechtw. Projizierende des Punktes o, d. h. der Hauptstrahl, und trifft die **Pr. Eb.** in o_2.

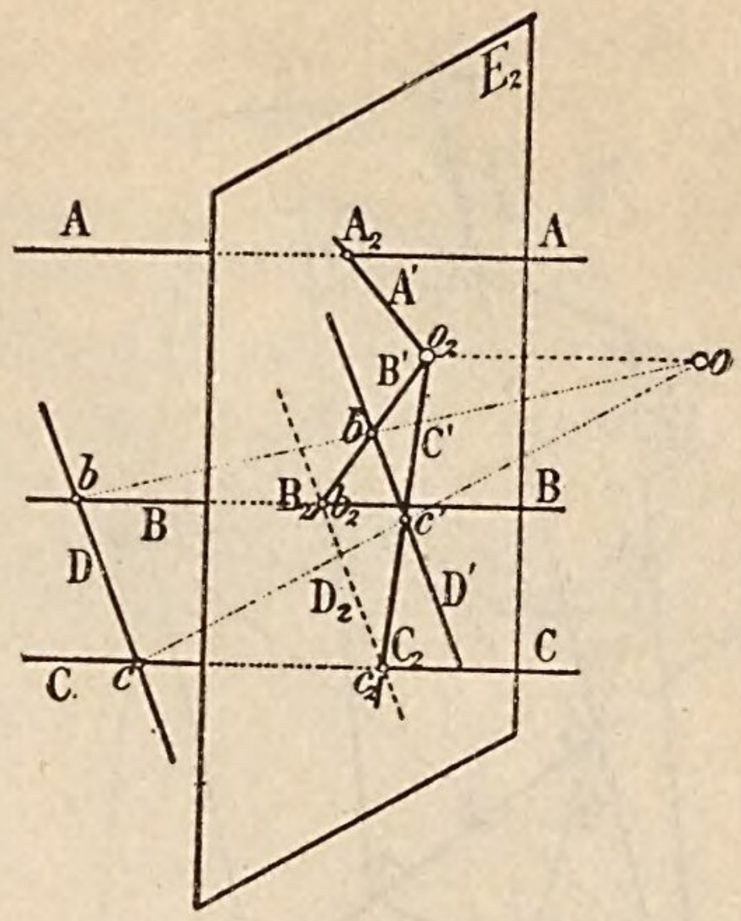
„Eine zur **Pr. Eb.** senkrechte Gerade besitzt als Flucht den Hauptpunkt.“ Eine Gerade kann endlich noch parallel zur **Pr. Eb.** gerichtet sein, wie z. B. die Gerade D, siehe Figur 70; sowohl Spur wie Flucht fallen in unendliche Ferne, d. h. die Gerade besitzt weder Spur noch Flucht. Will man eine solche Gerade durch centrale Projektion darstellen, so ist ein Punkt von ihr durch rechtw. und centrale Projektion zu geben; die centrale Projektion der Geraden selbst geht durch die centrale Projektion des Punktes in beliebiger Richtung; ihre rechtw. Projektion läuft zur centralen parallel.

Es lässt sich somit auch in centraler Projektion eine Gerade in jeder Lage zur **Pr. Eb.** zeichnen und umgekehrt aus der Projektionszeichnung die Lage einer Geraden im Raume erkennen.

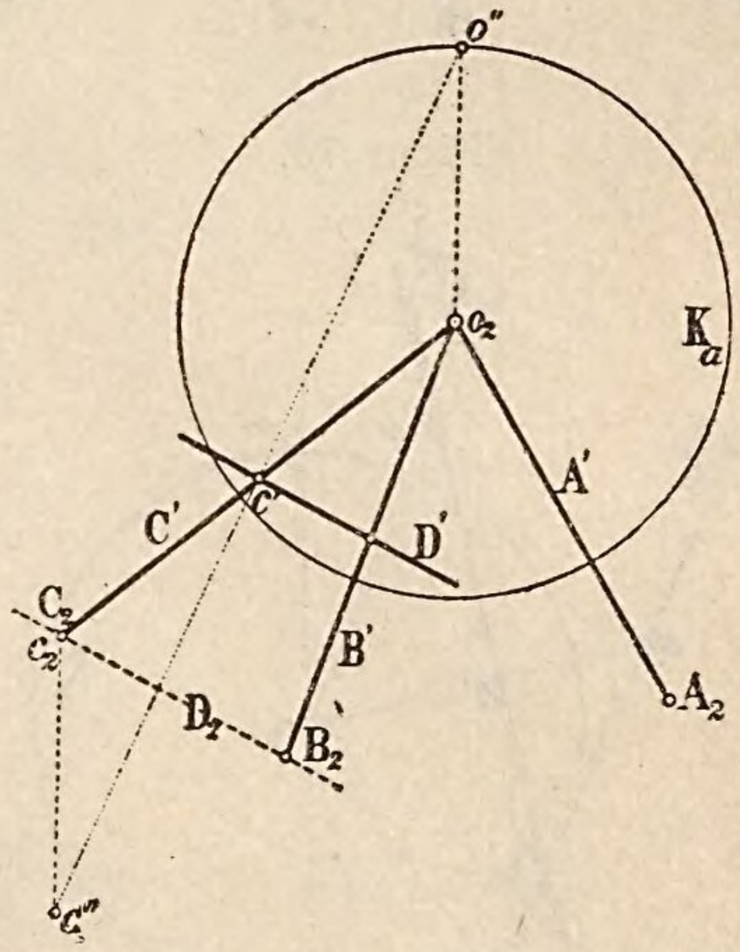
Erkl. 51. Aus dem in Erkl. 50 Gesagten folgt, dass die centralen Projektionen A', B', C' . . ., siehe Figur 70 und 71, aller zur **Pr. Eb.** senkrechten Geraden A, B, C . . . den Hauptpunkt o_2 als gemeinsamen Fluchtpunkt besitzen.

Will man also in der Projektionszeichnung, siehe Figur 71, eine zur **Pr. Eb.** senkrechte Gerade zeichnen, so braucht man nur einen beliebigen Punkt A_2, B_2, C_2 der **Pr. Eb.** als rechtw. Projektion einer solchen Geraden zu wählen und mit o_2 zu verbinden. Wählt man ferner etwa auf der Geraden C einen Punkt c beliebig (c_2 fällt mit C_2 zusammen, $\overline{c_2 c''}$ ist der Abstand des Punktes c von der **Pr. Eb.**) und bestimmt dessen centrale Projektion c', so bestimmen die zu einander parallelen Geraden D_2 und D' eine Gerade D im Raume, welche parallel zur **Pr. Eb.** im Abstande $\overline{c_2 c''}$ in der rechtw. projizierenden Ebene durch D_2 gelegen ist.

Figur 70.



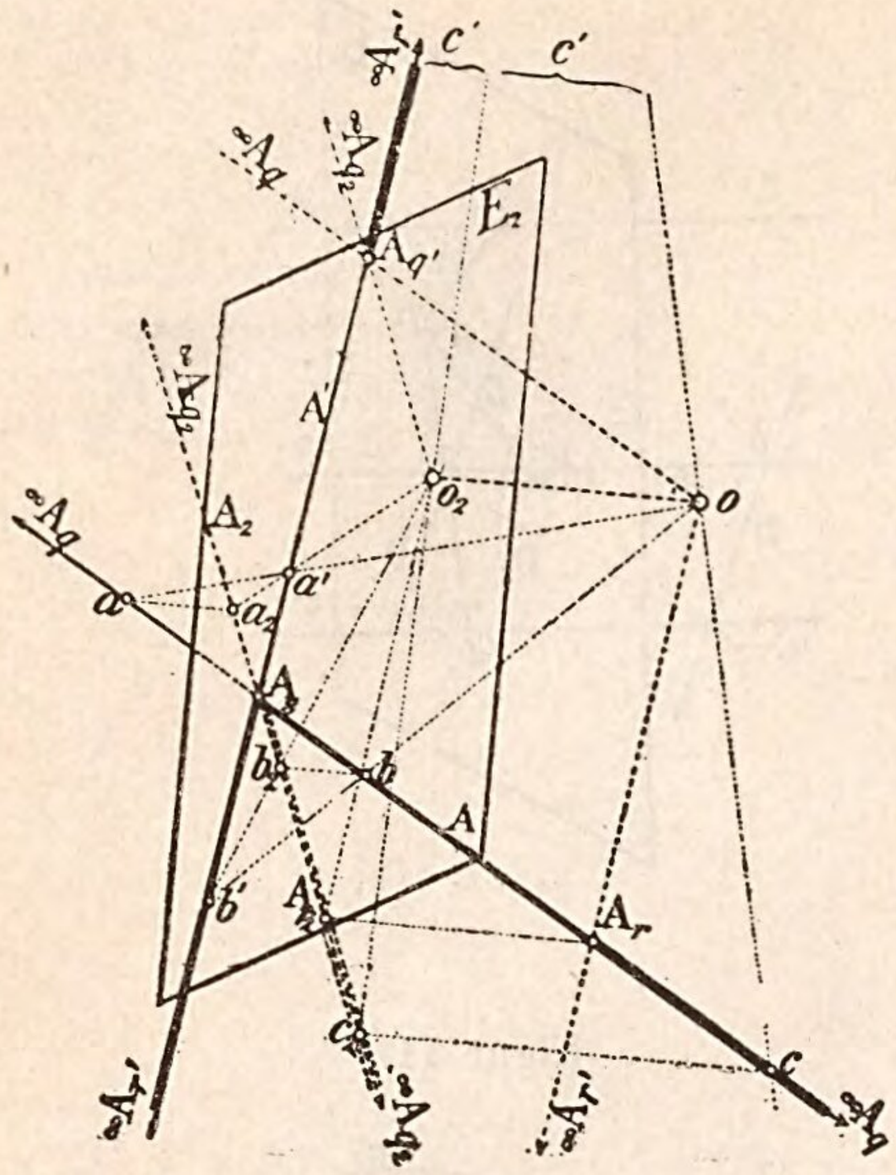
Figur 71.



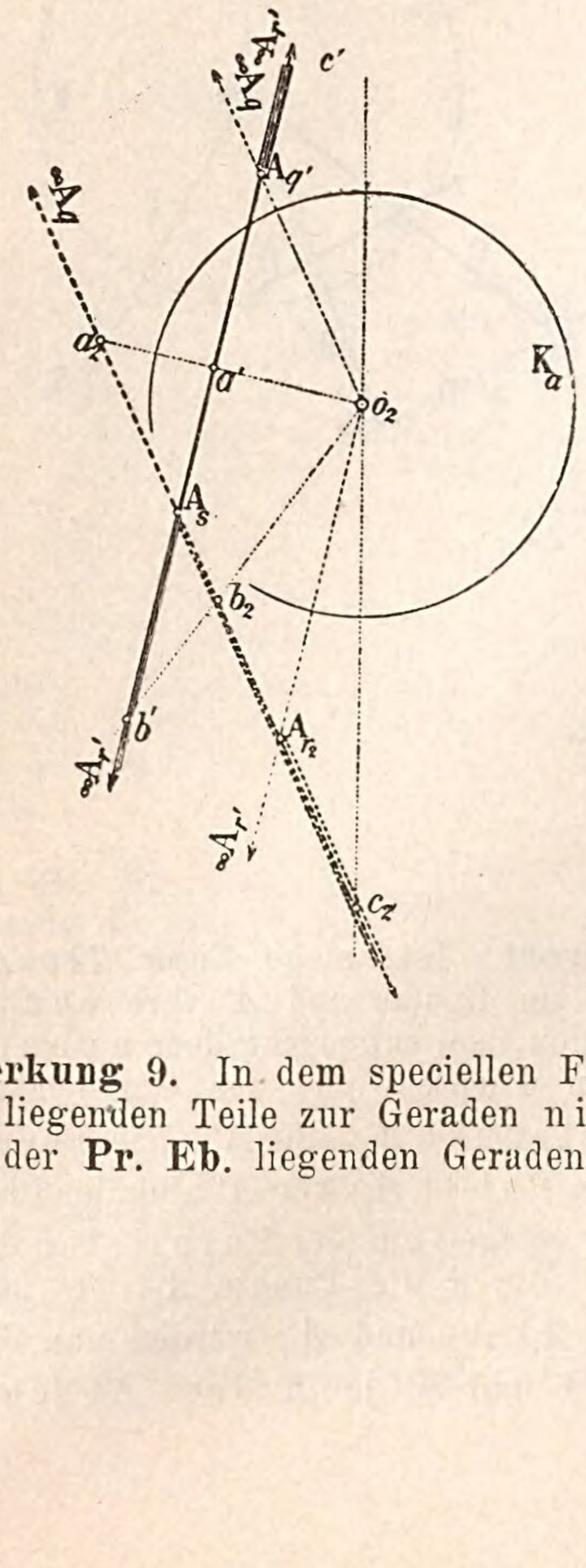
Frage 39. In welcher Weise sind die einzelnen Punkte einer Geraden im Raume den entsprechenden Punkten ihrer centralen Projektion zugeordnet?

Antwort. Ist, siehe Figur 72, A eine Gerade im Raume und A' ihre centrale Projektion, so entspricht dem unendlich fernen Punkte A_q der Geraden A der Fluchtpunkt $A_{q'}$ auf A', dem unendlich fernen Punkt $A_{r'}$ von A' aber der Punkt A_r von A, gelegen auf der Parallelen durch o zu A. Durch die Punkte A_s, A_q und A_r, ebenso A_s, $A_{q'}$ und $A_{r'}$ werden nun die Geraden A und A' je in drei Abschnitte

Figur 72.



Figur 73.



geteilt, die in ganz bestimmter Weise einander zugeordnet sind.

Lässt man nämlich einen Punkt von A, etwa a, von A_s aus auf dem mit dem **Pr. C.** nicht auf gleicher Seite liegenden Teile von A (in der Figur **72** mit einfacher Linie bezeichnet) fortbewegen, so durchläuft die entsprechende centrale Projektion a' des Punktes a die Strecke von A_s nach $A_{q'}$ und kommt im letzteren Punkte an, sobald der Punkt a mit dem unendlich fernen Punkt A_q sich deckt. Der ganzen unendlich langen hinter der **Pr. Eb.** liegenden Strecke $\overline{A_s A_q}$ entspricht daher die endliche Strecke $\overline{A_s A_{q'}}$.

Lässt man aber einen Punkt, etwa b von A, die Strecke vor der **Pr. Eb.**, d. h. auf der Seite, auf welcher das **Pr. C.** sich befindet, fortbewegen, so durchläuft die entsprechende centrale Projektion b' des Punktes b die Strecke von A_s nach dem unendlich fernen Punkte $A_{r'}$ und deckt sich mit letzterem Punkte, sobald der entsprechende Punkt b von A nach A_r gelangt ist. Der endlichen Strecke $\overline{A_s A_r}$ von A entspricht also eine unendlich lange Strecke $\overline{A_s A_{r'}}$ als centrale Projektion.

In der Figur sind die entsprechenden Strecken durch Doppellinien angedeutet.

Bewegt sich endlich ein Punkt, etwa c von A_r aus in demselben Sinne wie b weiter gegen den unendlich fernen Punkt A_q zu, so durchläuft die entsprechende Centralprojektion c' die unendlich lange Strecke $\overline{A_r A_{q'}}$ von $A_{r'}$ nach $A_{q'}$ und deckt sich wieder mit $A_{q'}$ wenn c mit A_r vereinigt ist. Es entspricht also bei dieser Bewegung einer unendlich langen Strecke $\overline{A_r A_q}$ von A wieder eine unendlich lange Strecke $\overline{A_{r'} A_{q'}}$ von A' in centraler Projektion.

In der Figur sind die entsprechenden Strecken durch dreifache Linien angedeutet.

Anmerkung 9. In dem speciellen Fall der Perspektive kommen die vor der **Pr. Eb.** liegenden Teile zur Geraden nicht in Betracht, es entspricht also einer hinter der **Pr. Eb.** liegenden Geraden als Perspektive stets eine endliche Strecke.

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 73, ist in gleicher Weise der Zusammenhang zwischen rechtw. und centraler Projektion einer Geraden A angedeutet.

Erkl. 52. Die Punkte $A_{r'}$ und $A_{q'}$ nennt man die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen oder auch die Gegenpunkte der beiden Geraden A und A'. Es wird später noch mehr von ihnen die Rede sein.

Der unendlich langen Strecke $\overline{A_s A_q}$ entspricht die endliche Strecke $\overline{A_s A_{q'}}$, der endlichen Strecke $\overline{A_s A_{r_2}}$ entspricht die unendliche Strecke $\overline{A_s A_{r'}}$, der unendlichen Strecke $A_{r_2} A_q$ entspricht schliesslich die unendliche Strecke $\overline{A_{r'} A_{q_1}}$.

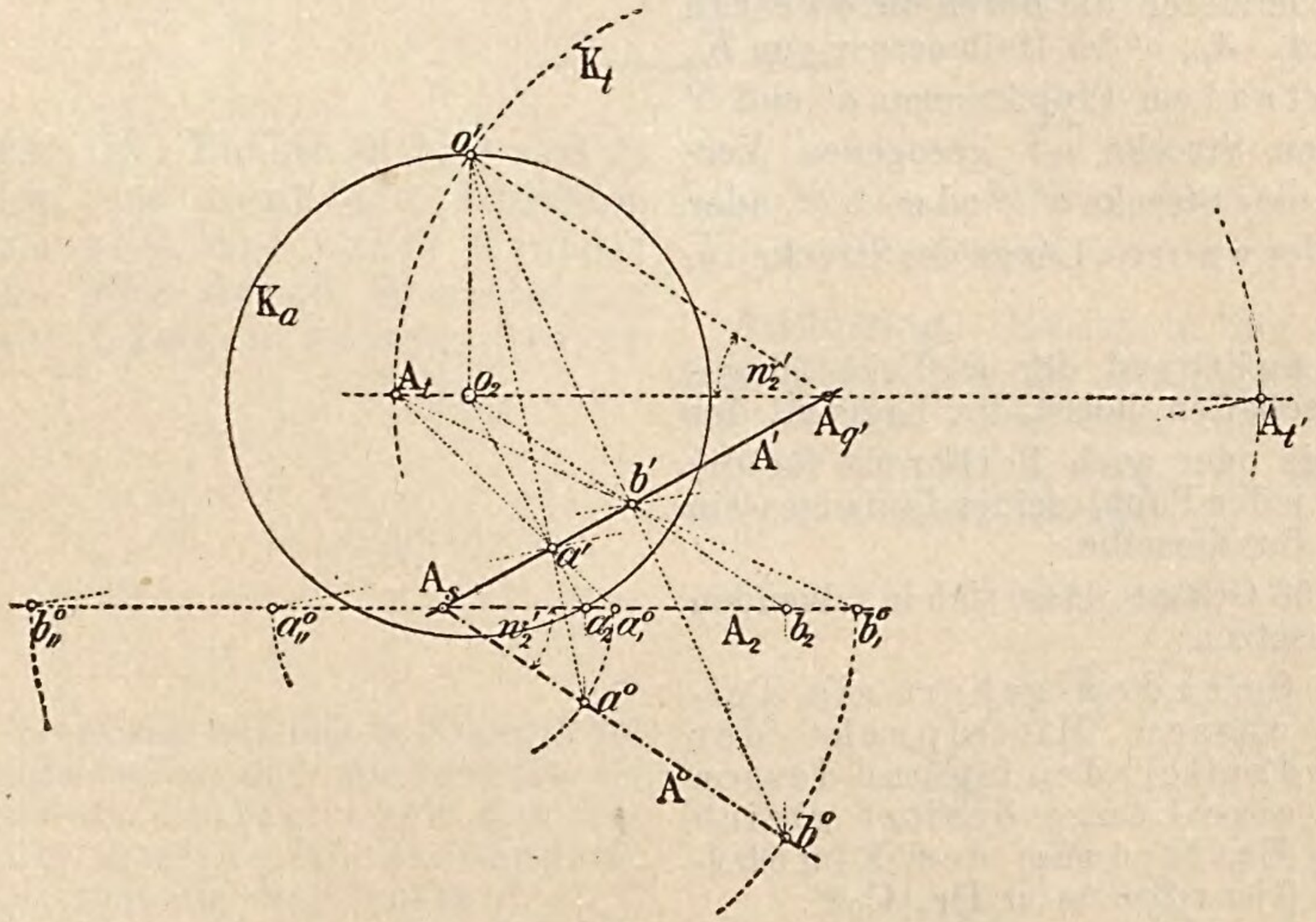
In der Figur 73 sollte der Punkt A_q eigentlich mit A_{q^2} als auf der rechtw. Projektion von A liegend bezeichnet sein, der Index 2 bei q wurde aus Versehen weggelassen.

Frage 39. Wie ermittelt man in der Projektionszeichnung den Neigungswinkel einer Geraden gegen die **Pr. Eb.**, sowie die wahre Länge einer gegebenen Strecke $\overline{a\,b}$?

Antwort. Ist eine Gerade A durch Spur A_s und Flucht $A_{q'}$ gegeben, so ist ihre rechtw. Projektion A_2 parallel zur Verbindungslinie $o_2 A_{q'}$. Letztere Linie stellt aber zugleich die Spur einer durch das **Pr. C.** senkrecht zur **Pr. Eb.** gelegten Ebene, d. h. die rechtw.

Erkl. 53. Zieht man, siehe Figur 74, die Linien $o'a'$ und $o'b'$, so gehen dieselben, siehe Figur 74, gleichfalls durch a^0 und b^0 und man

Figur 74.



erkennt unmittelbar die Aehnlichkeit der Dreiecke $A_s a' a^0$ und $A_{q'} a' o'$, ebenso $A_s b' b^0$ und $A_{q'} b' o'$, wodurch die folgenden Verhältnisgleichheiten begründet sind.

Es ist:

$$\frac{\overline{A_s a'}}{\overline{A_{q'} a'}} = \frac{\overline{A_s a^0}}{\overline{A_{q'} o'}} = \frac{\overline{a_2 a^0}}{\overline{o_2 o'}} = \text{constant} \quad \ldots \; 5)$$

Projektionen einer durch das **Pr. C.** zur Geraden A geführten Parallelen dar, welche mit der **Pr. Eb.** denselben Winkel w_2' einschliesst wie die Gerade A selbst. Zieht man daher $o_2 o'$ senkrecht zu $o_2 A_{q'}$ bis zum Schnitt mit K_a und verbindet o' mit $A_{q'}$, so gibt die Linie $o' A_{q'}$ die Umlegung der oben genannten Parallelen zu A um die Spur $o_2 A_{q'}$

ferner:

$$\frac{\overline{A_s b'}}{\overline{A_{q'} b'}} = \frac{\overline{A_s b^0}}{\overline{A_{q'} o'}} = \frac{\overline{b_2 b^0}}{\overline{o_2 o'}} = \text{constant} \quad \ldots \; 6)$$

Die Punkte A_s und $A_{q'}$ können daher als Mittelpunkte von Kreisen mit den Halbmessern gleich den Längen $\overline{A_s a^0}$, $\overline{A_s b_0^0}$ und $\overline{A_{q'} o'}$ genommen werden, deren Aehnlichkeitspunkte, siehe im I. Teil, die Punkte a' und b' beziehungsweise sind; denn beschreibt man um $A_{q'}$ als Mittelpunkt den Kreis K_t durch o', desgleichen um A_s als Mittelpunkt die Kreise durch a^0 und b^0 und zieht in den genannten Kreisen die parallelen Durchmesser $A_t A_{q'} A_{t'}$ und $b_0' a_0' A_s a^0_{11} b^0_{11}$, so bleiben die Verhältnisgleichheiten bestehen:

$$\frac{\overline{A_s a_1^0}}{\overline{A_{q'} A_t}} = \frac{\overline{A_s a^0_{11}}}{\overline{A_{q'} A_{t'}}} = \frac{\overline{A_s a^0}}{\overline{A_{q'} o'}} = \frac{\overline{a_2 a^0}}{\overline{o_2 o'}},$$

$$\frac{\overline{A_s b_1^0}}{\overline{A_{q'} A_t}} = \frac{\overline{A_s b^0_{11}}}{\overline{A_{q'} A_{t'}}} = \frac{\overline{A_s b^0}}{\overline{A_{q'} o'}} = \frac{\overline{b_2 b^0}}{\overline{o_2 o'}}. \quad 7)$$

Hieraus folgt aber unmittelbar die Gleichheit der Strecken $\overline{a^0 b^0}$, $\overline{a^0_1 b^0_1}$, $\overline{a^0_{11} b^0_{11}}$. Zieht man also in dem Kreise K_a einen ganz beliebigen Halbmesser, z. B. $A_q A_t$ oder $A_{q'} A_{t'}$ oder $A_{q'} o'$ und durch A_s Parallele hierzu, so begrenzen auf letzteren die durch die zweiten Endpunkte A_t, $A_{t'}$, o' der Halbmesser von K_a nach den centralen Projektionen a' und b' einer gegebenen Strecke $\overline{ab}$ gezogenen Verbindungslinien eine Strecke $\overline{a^0 b^0}$ oder $\overline{a^0_1 b^0_1}$ oder $\overline{a^0_{11} b^0_{11}}$ gleich der wahren Länge der Strecke $\overline{ab}$.

Erkl. 54. Auf Grund der in Erkl. 53 genannten Eigenschaften heisst der Kreis K_t der Teilungskreis oder auch Teilkreis für die Gerade A und jeder Punkt seines Umfanges ein Teilungspunkt für dieselbe.

Das in Erkl. 53 Gesagte lässt sich in folgenden Satz zusammensetzen:

„Zu jeder Geraden gehört ein Teilungskreis, dessen Mittelpunkt der Fluchtpunkt der Geraden ist, und dessen Halbmesser eine Länge besitzt gleich der wahren Entfernung des Fluchtpunktes der Geraden vom **Pr. C.**“

Erkl. 55. Ist der Fluchtpunkt einer Geraden der Augpunkt, und dies ist für alle zur **Pr. Eb.** senkrechten Geraden der Fall, so fällt der Teilungskreis mit dem Abstands- oder Distanzkreis zusammen und jeder Punkt desselben ist ein Teilungspunkt für die betreffende zur **Pr. Eb.** senkrechte Gerade und führt in diesem besonderen Fall auch die Bezeichnung Distanzpunkt.

ihrer rechtw. projizierenden Ebene und schliesst somit mit $o_2 A_{q'}$ den gesuchten Winkel w_2' ein.

Zur Bestimmung des Neigungswinkels einer Geraden mit der **Pr. Eb.** bedarf man somit bei der Darstellung in centraler Projektion nur der Flucht der Geraden, die Kenntnis ihrer Spur ist gar nicht notwendig.

Kennt man aber auch die Spur A_s und zieht durch A_s eine Parallele A^0 zu $o' A_{q'}$, so schliesst die Gerade A^0 mit A_2 gleichfalls den Winkel w_2' ein und stellt die Umlegung der Geraden A um die Spur A_2 ihrer rechtw. projizierenden Ebene dar.

Sind nun auf A' zwei Punkte a' und b' gegeben, deren wahre Entfernung bestimmt werden soll, so liefern die Verbindungslinien $o_2 a'$ und $o_2 b'$ auf A_2 die rechtw. Projektionen a_2 und b_2 der Punkte a und b und die Senkrechten durch a_2 und b_2 zu A_2 die Punkte a^0 und b^0 auf A^0 als Umlegungen der Punkte a und b in der rechtw. projizierenden Ebene der Geraden A; die Strecke $\overline{a^0 b^0}$ ist somit die wahre Länge von $\overline{a\,b}$, siehe auch Erkl. 53.

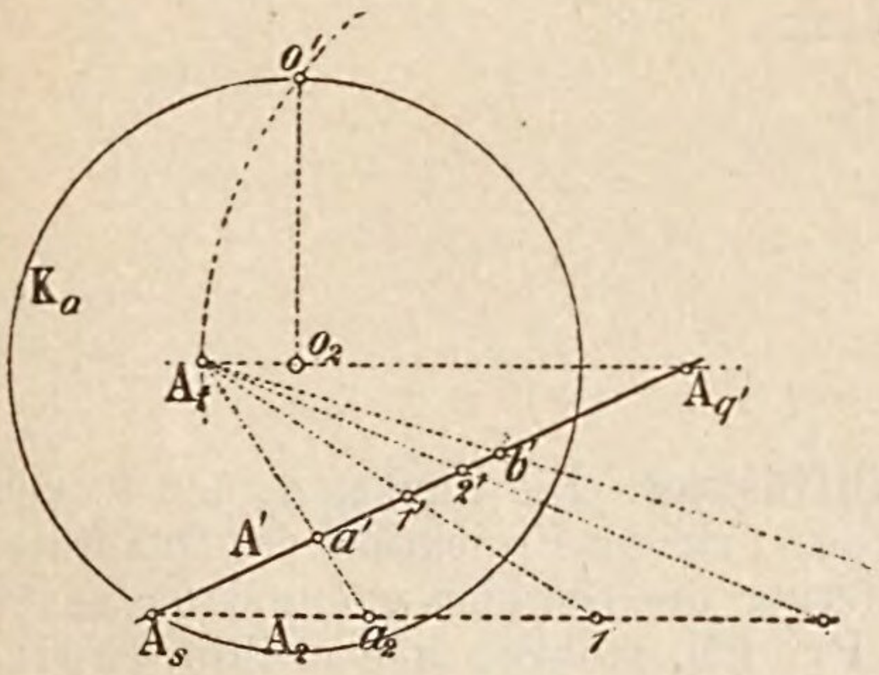
Mit anderen Worten:

„Alle zur **Pr. Eb.** senkrechten Geraden besitzen als Teilungskreis den Distanzkreis und jeder Punkt desselben ist ein Teilungspunkt."

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Auf einer Geraden A', gegeben durch Spur und Flucht, ist eine Strecke $\overline{a'b'}$ gegeben. Man soll dieselbe in n gleiche Teile teilen, d. h. die centralen Projektionen der Teilpunkte ermitteln.

Figur 75.

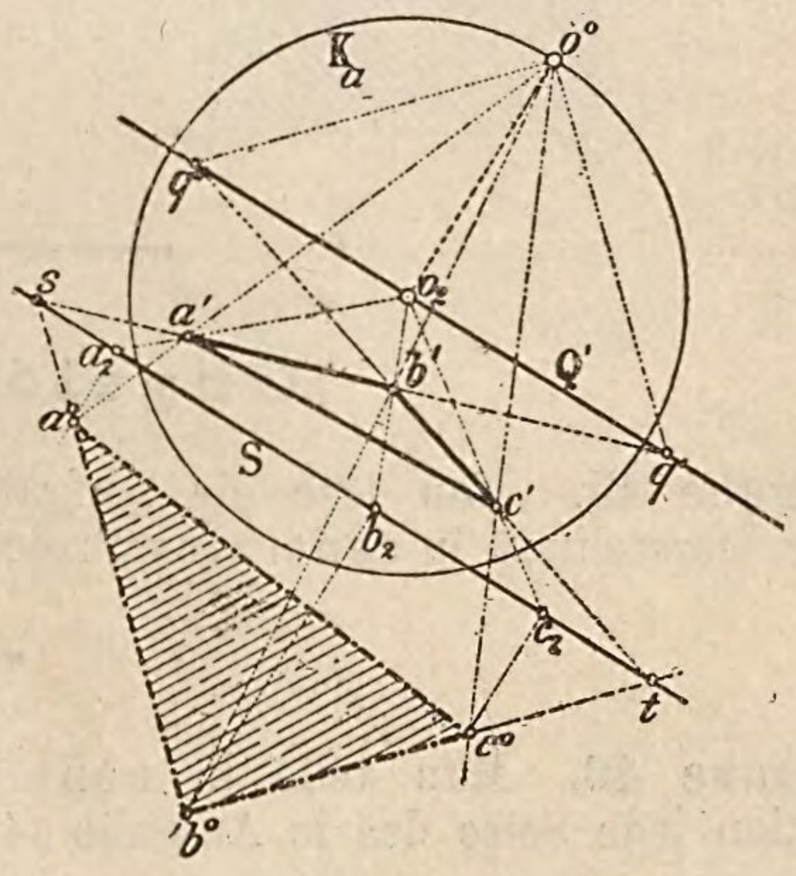


Auflösung. Angenommen, es sei $n = 3$, so ziehe man $o_2 A_{q'}$ und $o_2 o'$ senkrecht zu $o_2 A_{q''}$, so geht durch o' der Teilungskreis der Geraden A, dessen Durchschnitt auf $o_2 A_{q'}$ einen Teilungspunkt A_t ergibt. Zieht man nun durch A_s eine Parallele A_2 zu $o_2 A_{q''}$, so liefern die Verbindungslinien der Punkte a' und b' mit A_t auf A_2 die wahre Länge $\overline{a_2 b_2}$ der Strecke $\overline{a\,b}$, welche man somit nur in n, d. h. im vorliegenden Fall in drei gleiche Teile zu teilen hat. Die Verbindungslinien der Teilpunkte 1, 2 . . . mit A_t schneiden auf A' deren centralen Projektionen $1', 2' \ldots$ der Teilpunkte aus.

Aufgabe 43. Drei Punkte a, b, c sind je durch rechtw. und centrale Projektion gegeben. Man soll die wahre Gestalt des Dreiecks abc durch Ermittelung der wahren Längen seiner Seiten zeichnen.

Auflösung. Es ist in der Figur 76 angenommen, dass die Dreiecksebene senkrecht zur **Pr. Eb.** stehe, dann liegen die zweiten Projektionen a_2, b_2, c_2 der Eckpunkte a, b, c in einer Geraden S.

Figur 76.



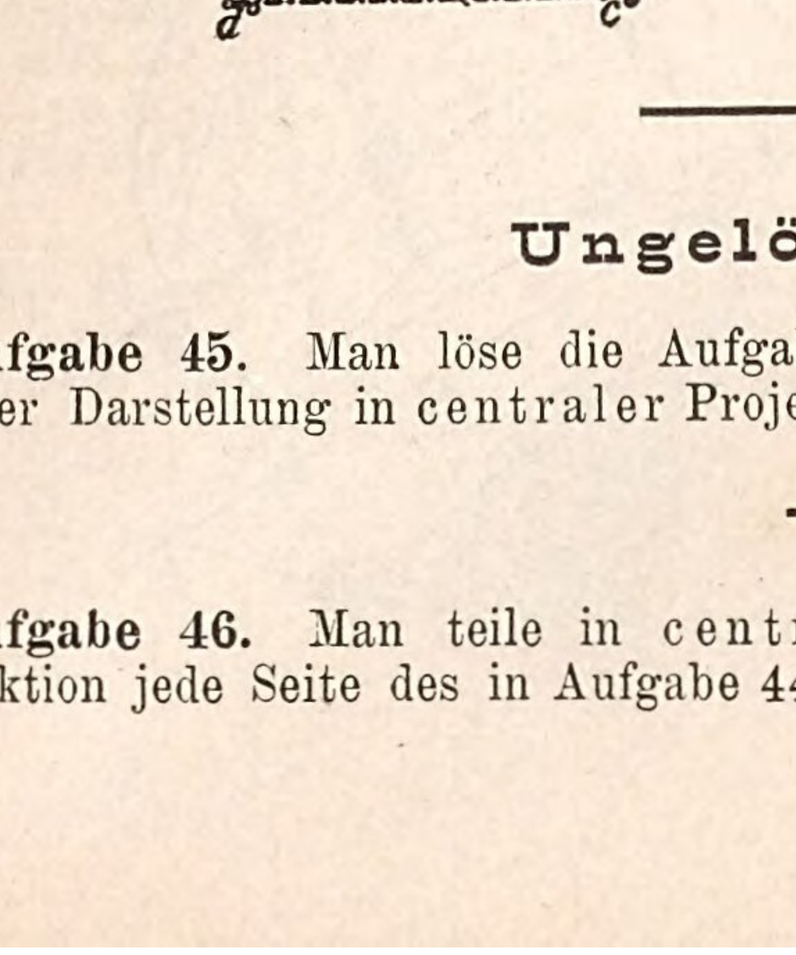
Erkl. 56. Mit Bezug auf das in Antwort der Frage 39 Gesagte stellen aber die Geraden sb^0 und tb^0 zugleich die Umlegungen der Geraden sb und tb in der Dreiecksebene abc dar. Es bilden somit die drei Punkte a^0, b^0, c^0 die Ecken eines Dreiecks $a^0 b^0 c^0$, das als Umlegung des Dreiecks abc um die Spur S der Dreiecksebene aufgefasst werden kann.

Man sieht die Umlegung $a^0 b^0 c^0$ sowie die centrale Projektion $a' b' c'$ sind centrisch-collineare Figuren mit dem Teilungspunkt o^0, welcher zugleich die Umlegung des **Pr. C.** in der Parallelebene durch dasselbe zur Dreiecksebene darstellt, als Collineationscentrum und der Spur der Dreiecksebene als Collineationsachse.

Im Durchschnitt von S mit den Verbindungslinien $a'b'$, $b'c'$ liegen die Spuren s und t der Dreiecksseiten, siehe Erkl. 49, die Parallele durch o_2 zu S liefert auf $a'b'$ und $b'c'$ die Fluchtpunkte q' und q'' der Seiten ab und bc. Bestimmt man o^0 auf K_a in der Senkrechten durch o_2 zu S, so ist o^0 ein Teilungspunkt sowohl für die Gerade $a'b'$ als auch für $b'c'$, weil die Teilkreise beider Geraden durch o^0 gehen. Man hat demnach nur durch s und t Parallele zu $q'o^0$ und $q''o^0$ zu ziehen und die Punkte a', b' und c' mit o^0 zu verbinden, so liefern diese Verbindungslinien auf den genannten Parallelen die Punkte a^0, b^0 und c^0 so, dass $\overline{a^0b^0}$ und $\overline{b^0c^0}$ die wahren Längen der Dreiecksseiten $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$ darstellen.

Aufgabe 44. Ein mit seiner Ebene zur **Pr. Eb.** senkrecht stehendes und mit einer Seite ab in der **Pr. Eb.** liegendes Quadrat ist durch seine rechtw. Projektion $a_2b_2c_2d_2$, siehe Figur 77, gegeben. Man soll die centrale Projektion des Quadrates zeichnen.

Figur 77.



Auflösung. Die Punkte a_2 und b_2 gehören der centralen Projektion des Quadrates an. Da ferner die Geraden ad und bc senkrecht zur **Pr. Eb.** stehen, gehen ihre centralen Projektionen durch den Hauptpunkt o_2, siehe Erkl. 50, und man hat daher auf den Linien a_2o_2 und b_2o_2 nur Längen gleich der Quadratseite aufzutragen. Zeichnet man zu diesem Zwecke das Quadrat $a_2b_2c^0d^0$, wie in der Figur 77, geschehen und zieht o_2o^0 parallel zu d_2d^0 bis zum Kreise K_a, so ist o^0 der Teilungspunkt für die Linien a_2d' und b_2d'. Die Verbindungslinien d^0o^0 und c^0o^0 schneiden somit auf a_2o_2 und b_2o_2 die Ecken d' und c' der centralen Projektion des Quadrates aus.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 45. Man löse die Aufgabe 24 bei der Darstellung in centraler Projektion.

Aufgabe 46. Man teile in centraler Projektion jede Seite des in Aufgabe 44 dar-

gestellten Quadrates in n gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallellinien zu den Quadratseiten.

Aufgabe 47. Eine zur **Pr. Eb.** E_2 parallele und zur **Pr. Eb.** E_1 senkrechte Gerade $\overline{a\,b}$ ist durch ihre rechtw. Projektion $a_2\,b_2$, sowie durch den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** als Seite eines zur **Pr. Eb.** E_2 (Bildebene) senkrechten Quadrates gegeben. Man zeichne die centrale Projektion des Quadrates und teile dessen Seiten in gleicher Weise ein wie in Aufgabe 46.

Aufgabe 48. Die in Aufgabe 47 gegebene Gerade $a\,b$ ist

a) die Kante eines Würfels, dessen Seitenflächen senkrecht bezw. parallel zur **Pr. Eb.** gerichtet sind,

b) die Kante eines rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Seitenflächen wie im Fall a gegen die **Pr. Eb.** liegen, während die im Punkte a noch anstossenden Kanten $\overline{a\,b}$, $\overline{a\,c}$ und $\overline{a\,d}$ sich verhalten sollen wie $m:n:p$ (3 : 2 : 1). Man zeichne die centrale Projektionen der unter a und b genannten Körper.

D) Ueber die Darstellung einer Ebene.

Frage 40. Wie wird eine Ebene in centraler Projektion dargestellt?

Erkl. 57. Spur und Flucht einer Ebene sind stets parallele Gerade von sonst beliebiger Lage für den Fall einer allgemeinen Lage der Ebene gegen die **Pr. Eb.** Besitzt die Ebene eine besondere Lage zur **Pr. Eb.**, so haben auch Spur und Flucht besondere Lagen zu einander.

Ist insbesondere die Ebene eine centralprojizierende, so fallen Spur und Flucht ineinander und die Ebene ist durch ihre Spur allein vollständig bestimmt; denn durch die genannte Linie und das **Pr. C.** ist nur eine Ebene möglich.

Steht die Ebene auf der **Pr. Eb.** senkrecht, so geht ihre Flucht durch den Hauptpunkt.

Ist endlich die Ebene parallel zur **Pr. Eb.** gerichtet, so fallen Spur und Flucht in unendliche Ferne und die Ebene wird hinsichtlich ihrer Lage im Raume bestimmt sein, sobald man einen Punkt von ihr durch rechtw. und centrale Projektion als gegeben voraussetzt, weil durch einen Punkt im Raume nur eine Ebene parallel zur **Pr. Eb.** denkbar ist.

Antwort. Ist E, siehe Figur 78, die darzustellende Ebene, so wird man zweckmässig in erster Linie ihre Schnittlinie S mit der **Pr. Eb.**, d. h. ihre „Spur“ zur Darstellung benützen, ausserdem aber noch eine beliebige Gerade derselben durch rechtw. und centrale Projektion als bekannt voraussetzen. Unter allen Geraden der Ebene E ist nun jene von besonderer Bedeutung, welche in unendlicher Ferne liegt, sie heisse Q; ihr entspricht in centraler Projektion die zu S parallele Gerade Q', d. i. die Schnittlinie einer durch o zur Ebene E geführten Parallelebene mit der **Pr. Eb.** Die Gerade Q' heisst die „Fluchtlinie“ oder kurzweg die „Flucht“ der Ebene.

Eine Ebene wird in centraler Projektion dargestellt durch „Spur und Flucht.“

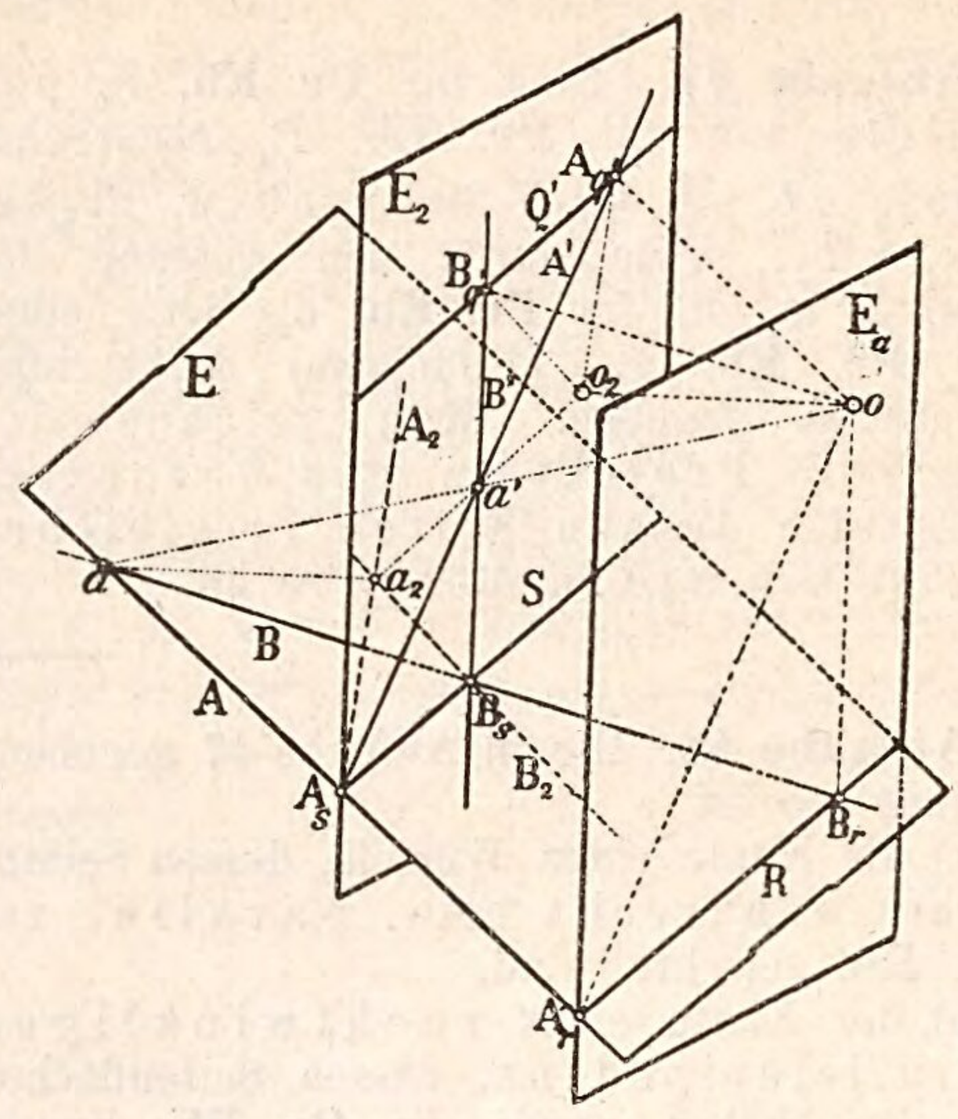
Erkl. 58. Steht eine Ebene zur **Pr. Eb.** senkrecht und läuft ausserdem noch horizontal, d. h. parallel zur **Pr. Eb.** E_1, so führt ihre Flucht die spezielle Bezeichnung „Horizontlinie“ oder kurzweg „Horizont“.

Erkl. 59. Ausser der Geraden Q' ist noch eine zweite bemerkenswerte Gerade der Ebene E zu verzeichnen, nämlich jene Gerade, welche der unendlich fernen Geraden der **Pr. Eb.** entspricht. Legt man durch das **Pr. C.** eine Parallelebene E_a zur **Pr. Eb.** E_2, siehe Figur 78, so schneidet dieselbe die Ebene E nach einer Geraden R, deren centrale Projektion R' in unendlicher Ferne sich befindet. Man nennt die Gerade R häufig die Verschwindungslinie der Ebene E'.

Erkl. 60. Zieht man in der Ebene E beliebige Gerade A, B, siehe Figur 78, und ermittelt deren centrale Projektionen A', B', so treffen dieselben die Fluchtlinie stets in den Fluchten $A_{q'}$, $B_{q'}$ der Geraden A, B, während letztere selbst auf R die Punkte A_r und B_r, d. h. die Gegenpunkte zu $A_{q'}$ und $B_{q'}$, ausschneiden.

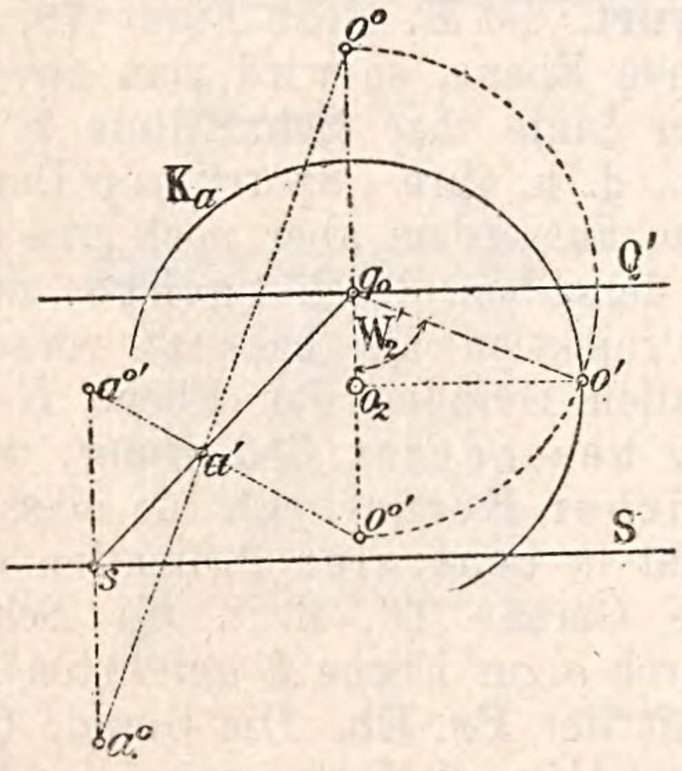
Mit Bezugnahme auf die Bezeichnung der Geraden R, siehe Erkl. 59, nennt man die Punkte A_r und B_r auch die Verschwindungspunkte der Geraden A und B.

Figur 78.



Frage 41. Wie konstruiert man in centraler Projektion die Neigungswinkel einer Ebene mit der **Pr. Eb.** (Bildebene)?

Figur 78 a.



Antwort. Ist die Ebene gegeben durch Spur S und Flucht Q', siehe Figur 78 a, so bildet die durch Q' und das **Pr. C.** gelegte Ebene, weil parallel zur gegebenen, mit der **Pr. Eb.** den gleichen Winkel wie letztere und man erhält denselben als Winkel W_2' bei q_0 in dem Konstruktionsdreieck $o_2\, q_0\, o'$ des Punktes o, d. h. des **Pr. C.**

D) Ueber die gegenseitigen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen zu einander.

a) Lagen von Punkt und Gerade.

Frage 42. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen eines Punktes zu einer Geraden?

Antwort. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so muss die rechtw. und centrale

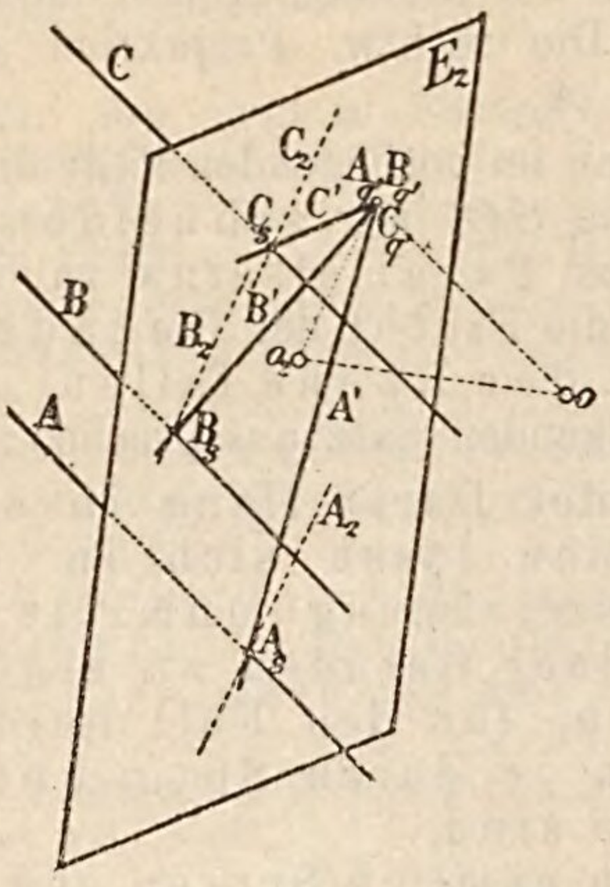
Projektion des Punktes auf der diesbezüglichen Projektion der Geraden liegen, im andern Falle nicht.

---

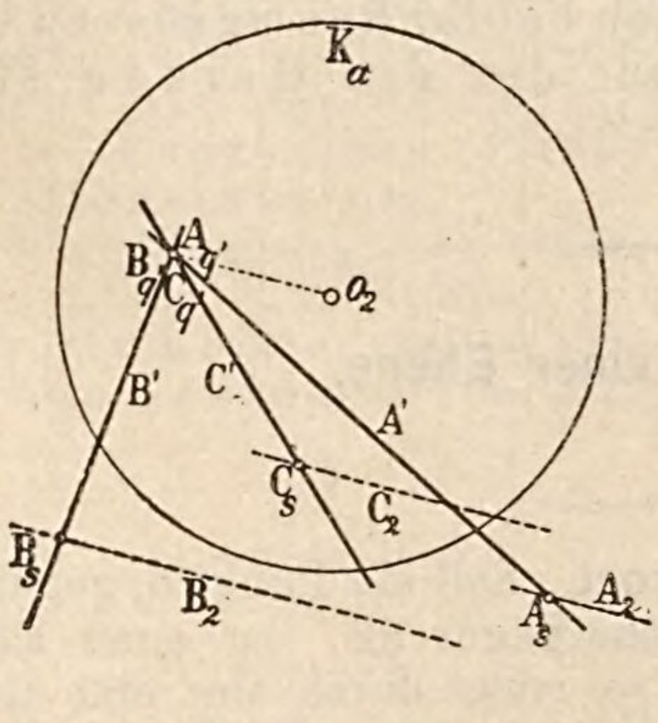
b) Lagen zweier Geraden.

Frage 43. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen zweier Geraden?

Figur 79.



Figur 80.



Antwort. Schneiden sich die Geraden und bilden somit eine Ebene, so muss die Verbindungslinie der Spuren der Geraden parallel sein zur Verbindungslinie ihrer Fluchten; erstere bildet die Spur, letztere die Flucht der Ebene beider Geraden.

Sind die Geraden zu einander parallel, wie z. B. die Geraden *A*, *B*, *C*, siehe Figur 79, so geht der durch das **Pr. C.** zu einer der Geraden, etwa *A*, gezogene Parallelstrahl auch durch den unendlich fernen Punkt von *B*, *C* . . .; den sämtlichen parallelen Geraden entspricht somit in der **Pr. Eb.** der nämliche Punkt als centrale Projektion ihrer unendlich fernen Punkte. Man erhält daher den Satz:

„Parallele Gerade besitzen in centraler Projektion denselben Fluchtpunkt."

In der Projektionszeichnung, siehe Figur 80, sind die Centralprojektionen der parallelen Geraden *A*, *B*, *C* als Gerade *A'*, *B'*, *C'*, die sich im nämlichen Fluchtpunkt treffen, dargestellt, ihre Spuren können beliebige Punkte A_s, B_s, C_s der **Pr. Eb.** sein; ihre rechtw. Projektionen A_2, B_2, C_2 laufen parallel zur Verbindungslinie $o_2 A_{q'}$.

Bei windschiefen Geraden endlich können Spuren und Fluchten ganz beliebige Lage zu einander haben.

Sind die Geraden je durch centrale und rechtw. Projektion dargestellt, so wird bei sich schneidenden Geraden die Verbindungslinie der Schnittpunkte der centralen und rechtw. Projektionen durch den Hauptpunkt gehen, während bei parallelen oder windschiefen Geraden die rechtw. Projektionen gleichfalls parallel oder aber ganz beliebig gerichtet sein können.

---

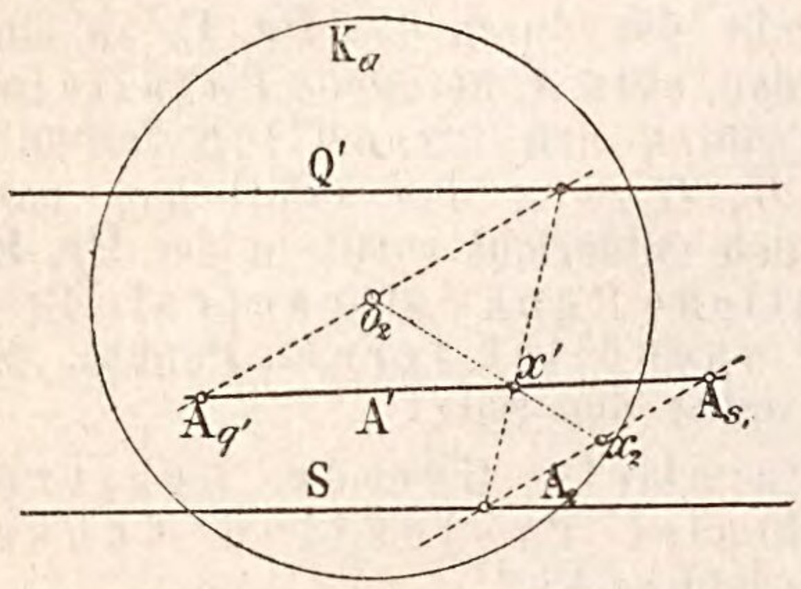
c) Lagen einer Geraden und einer Ebene.

Frage 44. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen einer Geraden und einer Ebene?

Antwort. Liegt eine Gerade in einer Ebene, so muss sowohl Spur wie Flucht der Ge-

Erkl. 61. Die nebenstehende Antwort enthält zugleich die Lösung der Aufgabe: „Man soll den Schnittpunkt einer Geraden A mit einer Ebene SQ' konstruieren.“ Anstatt nun die parallelen Geraden durch A_s und $A_{q'}$ ganz beliebig als Spur und Flucht einer die Gerade A enthaltenden Ebene zu ziehen, kann man zweckmässig den Fluchtpunkt $A_{q'}$ der Geraden A mit dem Hauptpunkt verbinden und durch die Spur A_s eine Parallele zur genannten Verbindungslinie ziehen. Man hat in diesem Fall dann durch die Gerade A eine zur **Pr. Eb.** senkrechte Ebene gelegt und bestimmt deren Schnitt mit der gegebenen Ebene.

Figur 81.



raden in die bezügliche Spur und Flucht der Ebene fallen; findet dies aber, wie z. B. in Figur 81, nicht statt, so geht daraus hervor, dass die Gerade A nicht in der Ebene SQ' liegt, sondern diese schneidet. Man erhält den Schnittpunkt unmittelbar in centraler Projektion durch Ziehen zweier parallelen Geraden durch Spur und Flucht der Geraden A, als Spur und Flucht einer zweiten Ebene, welche die Spur und Flucht der gegebenen Ebene bezw. in der Spur und Flucht einer Geraden der gegebenen Ebene treffen, deren centrale Projektion daher auf A' die centrale Projektion x' des Schnittpunktes x der Geraden A mit der Ebene SQ' liefert. Die rechtw. Projektion x_2 befindet sich auf A_2.

Es kann im vorliegenden Falle die Gerade A die Ebene SQ' nur schneiden, denn im Fall eines Parallelseins zu ihr müsste offenbar die Flucht der Geraden in die Flucht der Ebene fallen. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

„Bei der Darstellung in centraler Projektion lässt sich in der Projektionszeichnung unmittelbar die Lage einer Geraden zu einer Ebene erkennen, für den Fall beide Raumgrössen je durch Spur und Flucht gegeben sind.

Fallen nämlich Spuren und Fluchten in einander, so liegt die Gerade in der Ebene, fallen nur die Fluchten in einander, so ist die Gerade **parallel** zur Ebene. Liegen aber die Spuren und Fluchten beider Raumgrössen beliebig, so schneidet die Gerade stets die Ebene.“

---

d) Lagen eines Punktes zu einer Ebene.

Frage 45. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die Lagen eines Punktes zu einer Ebene?

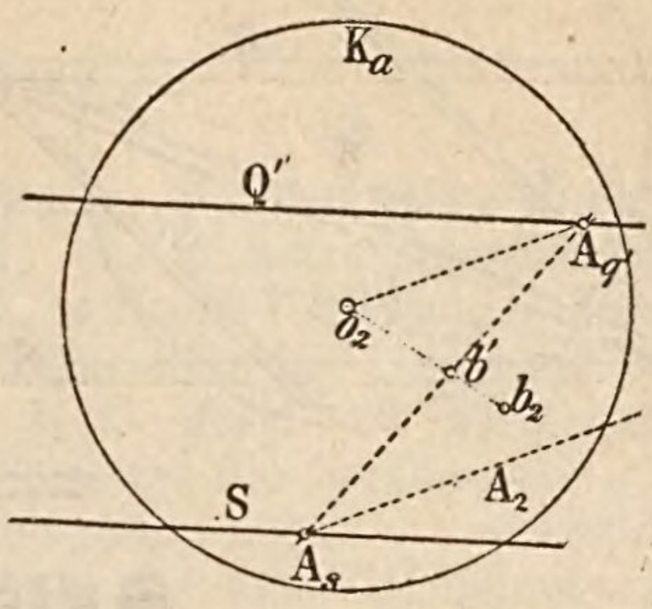
Erkl. 62. Durch die Winkelbestimmung einer Ebene mit der **Pr. Eb.** ist zugleich die Aufgabe des Umlegens der Ebene in die **Pr. Eb.** gelöst. Denn soll z. B. die in Figur 78 dargestellte Ebene in die **Pr. Eb.** umgelegt werden, so kann dies in sehr einfacher Weise geschehen: Man legt zunächst die Parallelebene $o\,Q'$ zur gegebenen Ebene in die **Pr. Eb.** um, wodurch das **Pr. C.** entweder nach o^0 oder nach $o^{0'}$ ($\overline{q_0\,o^0} = \overline{q^0\,o^{0'}} = \overline{q_0\,o'}$) gelangt, je nachdem die Umlegung in dem einen oder anderen Sinne vorgenommen wird. Ist

Antwort. Soll ein Punkt b, gegeben durch $b_2\,b'$, siehe Figur 82, in einer Ebene SQ' liegen, so muss durch ihn eine Gerade der Ebene möglich sein. Zieht man also die Gerade $A_s\,A_{q'}$ durch b' in der Ebene SQ' und bestimmt deren rechtw. Projektion A_2, so wird der Punkt b in der Ebene liegen, wenn A_2 durch b_2 geht, im anderen Falle nicht.

nun a' ein Punkt der Ebene SQ', dessen Umlegung bestimmt werden soll, so ziehe man durch ihn eine Gerade sq^0_0 der Ebene. Die Umlegung des Parallelstrahles dieser Geraden ist aber o^0q^0; es wird somit die Umlegung der Geraden selbst parallel zu o^0q_0 sein und durch s gehen, und man hat nur noch, um die Umlegung a' selbst zu erhalten, die wahre Länge der Strecke $\overline{sa}$ nach sa^0 abzutragen, was mittels des Punktes o^0 als Teilungspunkt einfach durch Ziehen der Linie o^0a' geschehen kann, die Verbindungslinie o^0a' schneidet die gesuchte Umlegung a^0 des Punktes a aus.

Hätte man die Parallelebene oQ' zur gegebenen Ebene so umgelegt, dass o nach $o^{0\prime}$ gelangt, so lieferte die Verbindungslinie o^0a' die Umlegung $a^{0\prime}$ auf $sa^{0\prime}$.

Figur 82.



Erkl. 63. Aus dem in Erkl. 62 Gesagten folgt eine einfache Regel für das Umlegen ebener Gebilde in centraler Projektion. Man legt zunächst die Parallelebene zur gegebenen Ebene um, bestimmt die Umlegung o^0 des **Pr. C.** und zieht durch jeden Punkt der Figur, welche umgelegt werden soll, eine Gerade der Ebene; verbindet man deren Fluchtpunkt mit o^0, so gibt die Parallele hiezu durch die zugehörige Spur der Geraden die Umlegung der Geraden, die Umlegung des Punktes selbst liegt auf der Verbindungslinie der **centralen** Projektion mit dem Punkte o^0 oder $o^{0\prime}$.

Erkl. 64. Aus der in Erkl. 63 angegebenen Konstruktion für die Umlegung eines ebenen Gebildes folgt unmittelbar, dass Umlegung und centrale Projektion centrisch-collineare Figuren sind mit der Spur der Ebene als Collineationsachse, der Flucht als der einen Gegenachse und dem umgelegten Punkt o als Collineationscentrum.

Die zweite Gegenachse erhält man unmittelbar in der Umlegung jener Geraden R der Ebene, welche der unendlich fernen Geraden R' der **Pr. Eb.** entspricht.

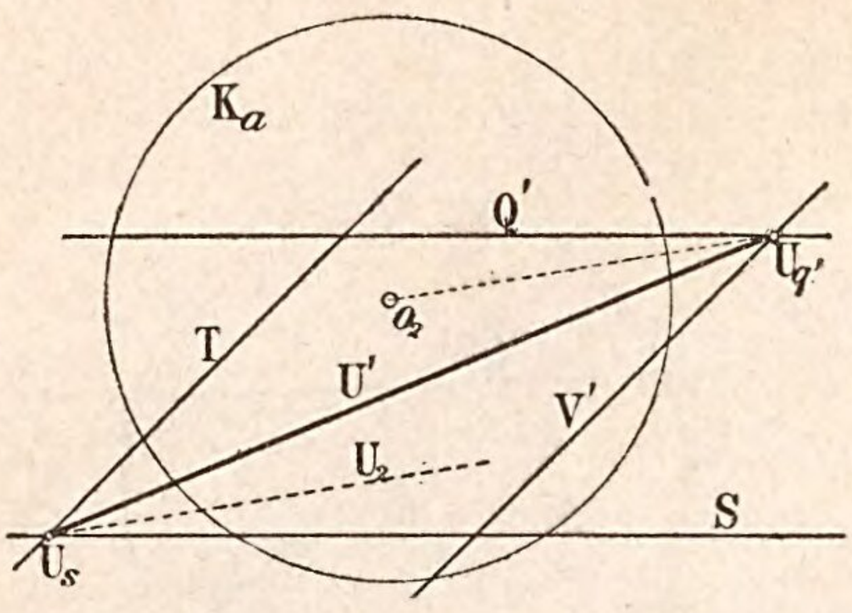
---

d) Lagen zweier Ebenen.

Frage 46. Wie erkennt man in der Projektionszeichnung die möglichen Lagen zweier Ebenen?

Antwort. Sind die Ebenen je durch Spur und Flucht gegeben, so schneiden sie sich stets, wenn Spur und Flucht sich schneiden, und zwar gibt der Durchschnittspunkt der Spuren S und T die Spur U_s, der Durchschnittspunkt der Fluchten Q' und V' die Flucht $U_{q'}$ der Durchschnittslinie U beider Ebenen, siehe Figur 83.

Figur 83.



Sind die Spuren und Fluchten beider Ebenen zu einander parallel, so ist es auch deren Schnittlinie und man erhält einen Punkt derselben durch Annahme einer ganz beliebigen dritten Ebene und Bestimmung der Schnittlinie derselben mit den beiden gegebenen Ebenen. Genannte Schnittlinien treffen sich in einem Punkte der Schnittlinie der beiden ursprünglich gegebenen Ebenen.

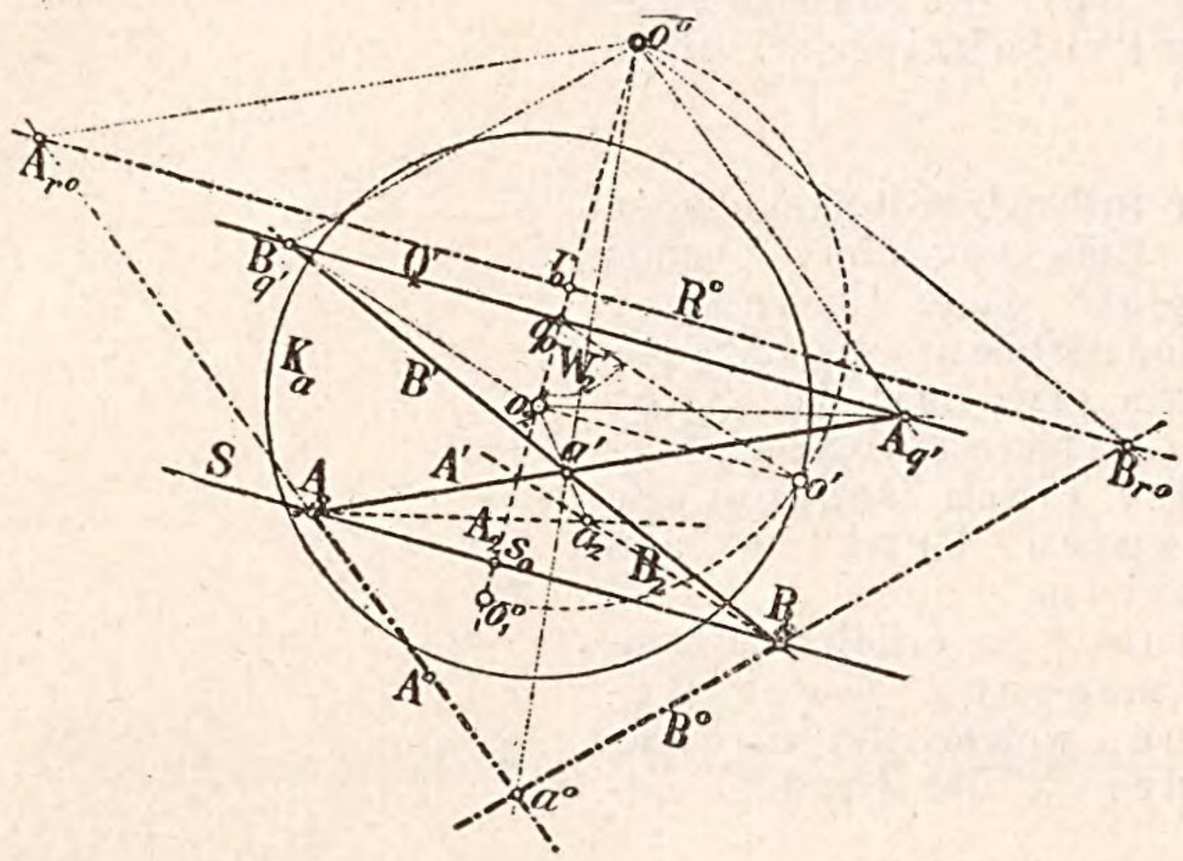
Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 49. Man bestimme den Neigungswinkel zweier sich schneidenden Geraden A und B in wahrer Grösse?

Auflösung. Sind die beiden Geraden A und B gegeben je durch Spur und Flucht, so gibt die Verbindungslinie ihrer Spuren die Spur S, jene der Fluchten die Flucht Q' der Ebene der beiden Geraden und die Linien S und Q' müssen zu einander parallel sein.

Erkl. 65. Will man lediglich die Grösse des Neigungswinkels von A und B bestimmen, so ist die Umlegung der Ebene selbst gar nicht nötig, denn die Parallelstrahlen $o^0 A_{q'}$ und $o^0 B_{q'}$ schliessen ja gleichfalls den gesuchten Winkel ein.

Figur 84.



Erkl. 66. Zieht man durch o^0 die Parallelstrahlen $o^0 A_{r^0}$ und $o^0 B_{r^0}$ zu den Linien A' und B', so geben deren Schnitte mit A^0 und B^0 die Gegenpunkte $A^0{}_{r^0}$ und $B^0{}_{r^0}$ der Geraden A und B in der Umlegung, und deren Verbindungslinie R^0 gibt die zweite Gegenachse der centrischen Collineation zwischen centraler Projektion und Umlegung.

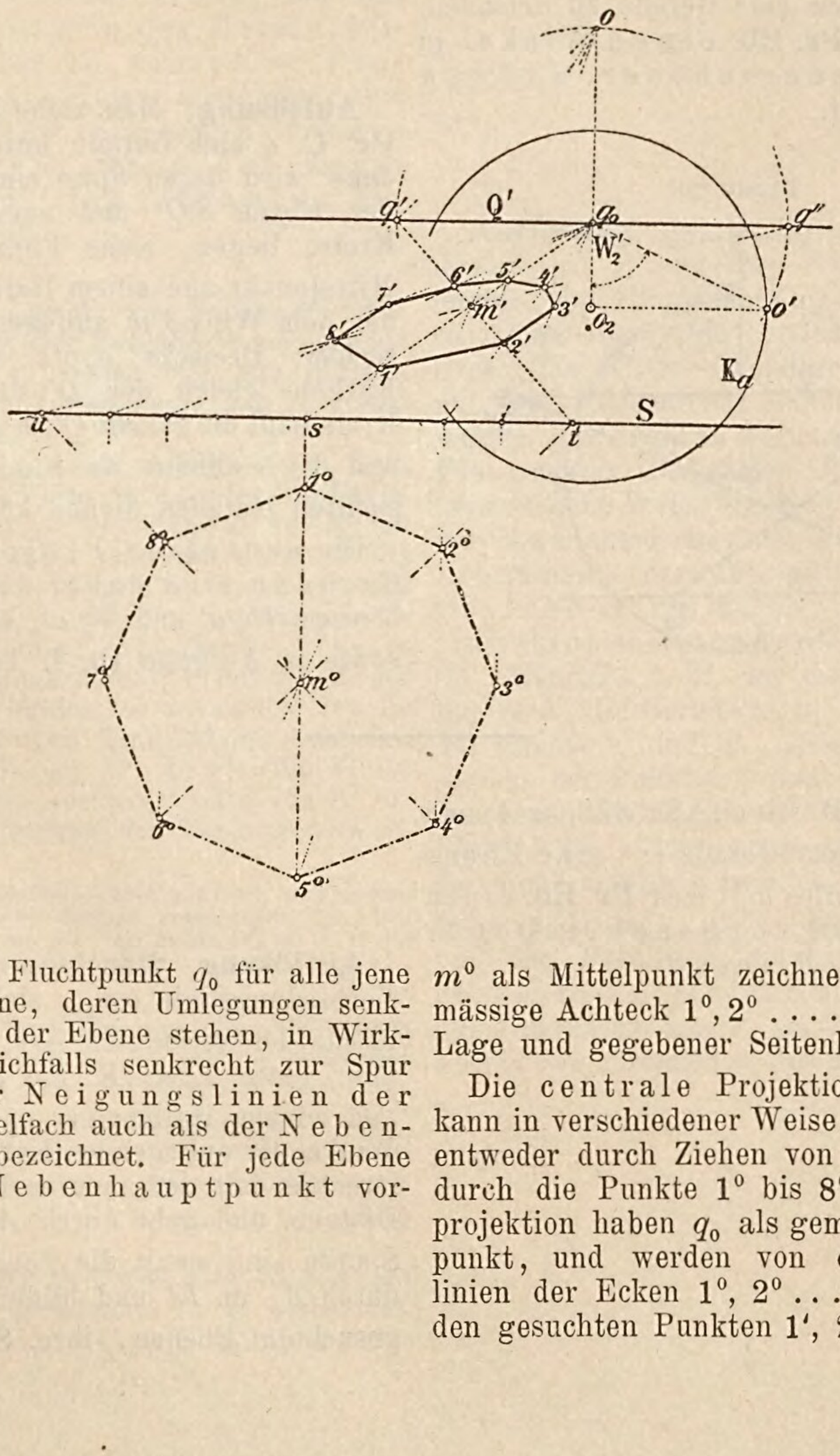
Legt man die Ebene SQ' in die **Pr. Eb.** um, so bestimmt sich zunächst die Umlegung o^0 des **Pr. C.** mittels des Dreiecks $o_2 q_0 o'$, siehe Figur 84, wodurch sich in den Verbindungslinien $o^0 A_{q'}$ und $o^0 B_{q'}$ die Richtungen der umgelegten Geraden A^0 und B^0, welche durch A_s und B_s hindurchgehen, ergeben. A^0 und B^0 schliessen den Neigungswinkel der Geraden A und B in wahrer Grösse ein, siehe Erkl. 65.

Aufgabe 50. In einer durch Spur und Flucht bestimmten Ebene SQ' liegt ein Punkt m als Mittelpunkt eines regelmässigen Achtecks, von bekannter Seitenlänge, dessen centrale Projektion m' gegeben ist.

Man soll die wahre Gestalt des Achtecks, sowie dessen centrale Projektion zeichnen.

Auflösung. Man bestimme zunächst, siehe Figur 85, das Konstruktionsdreieck $o_2 q_0 o'$ des **Pr. C.**, sowie die Umlegung o^0 des letzteren (in der Figur ist die Umlegung irrtümlich durch o statt durch o^0 bezeichnet) ziehe hierauf durch m' die Gerade nach q_0, so geht deren Umlegung durch s senkrecht zu S, auf ihr und auf der Verbindungslinie $o^0 m'$ liegt die Umlegung m^0 des Punktes m. Um

Figur 85.



Erkl. 67. Der Fluchtpunkt q_0 für alle jene Geraden der Ebene, deren Umlegungen senkrecht zur Spur S der Ebene stehen, in Wirklichkeit also gelichfalls senkrecht zur Spur stehen, d. h. der Neigungslinien der Ebene, wird vielfach auch als der Nebenhauptpunkt bezeichnet. Für jede Ebene ist ein solcher Nebenhauptpunkt vorhanden.

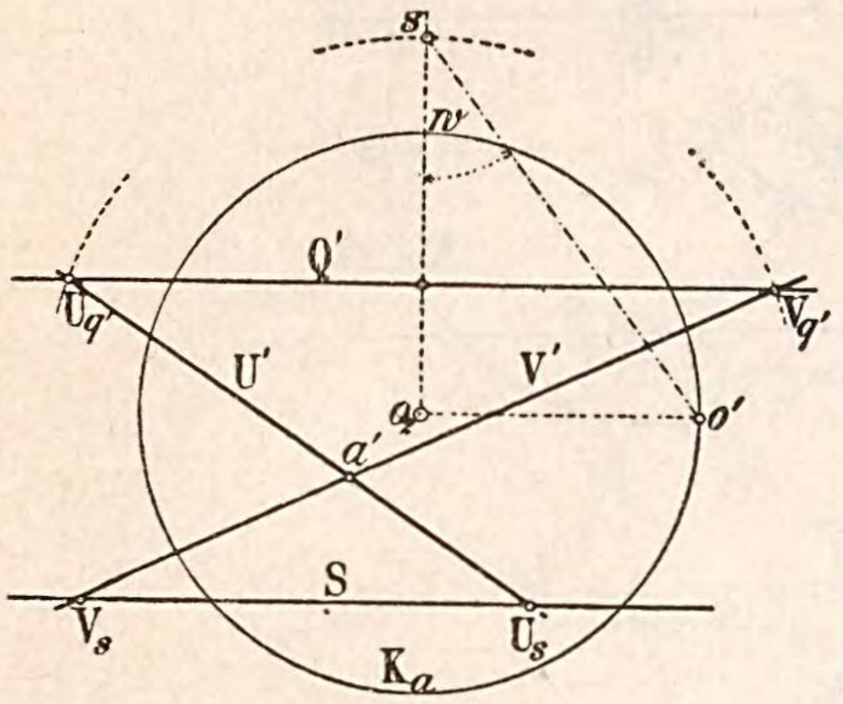
m^0 als Mittelpunkt zeichne man das regelmässige Achteck $1^0, 2^0 \ldots . 8^0$ in beliebiger Lage und gegebener Seitenlänge.

Die centrale Projektion $1', 2' \ldots . 8'$ kann in verschiedener Weise ermittelt werden, entweder durch Ziehen von Senkrechten zu S durch die Punkte 1^0 bis 8^0; deren Centralprojektion haben q_0 als gemeinsamen Fluchtpunkt, und werden von den Verbindungslinien der Ecken $1^0, 2^0 \ldots . 8^0$ mit o^0 in den gesuchten Punkten $1', 2' \ldots . 8'$ ge-

schnitten, oder falls die Schnitte entsprechender Geraden unter zu spitzen Winkel stattfinden, und infolge dessen ungenau ausfallen sollten, durch Benützung der Teilungspunkte q' und q'', indem man die Abstände der Ecken 1^0 bis 8^0 von S von den Schnittpunkten der Senkrechten zu S durch die Punkte 1^0 bis 8^0 mit S entweder nach rechts oder nach links auf S abträgt, je nachdem der Teilungspunkt q' oder q'' benützt wird. So ist in der Figur die Strecke $\overline{su} = \overline{st} = \overline{sm^0}$ abgetragen und jede der Verbindungslinien tq' oder uq'' enthält die Punkte $2'$ und $6'$ und geht durch m'.

Aufgabe 51. In einer durch Spur S und Flucht Q' gegebenen Ebene ist durch einen Punkt a derselben eine Gerade zu zeichnen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel w von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Figur 86.



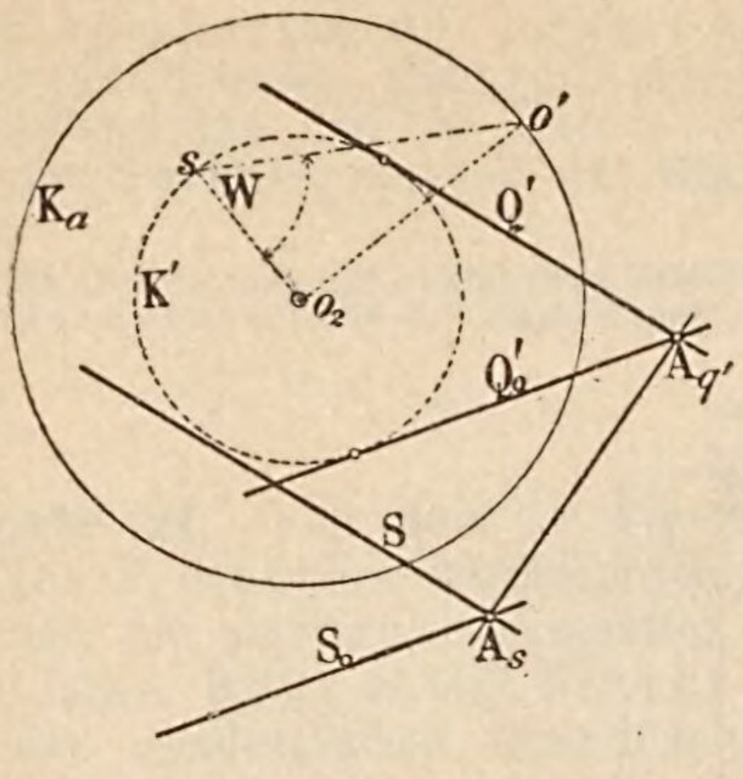
Auflösung. Man ziehe zunächst durch das **Pr. C.** o eine Gerade unter dem Winkel w, dann wird deren Spur einmal in die Flucht der Ebene SQ' und ausserdem auf einem Kreise liegen, siehe Figur 86, mit o_2 als Mittelpunkt und einem Halbmesser $o_2 s$ gleich der dem Winkel w anliegenden Kathete eines rechtw. Dreiecks $o_2 o' s$ mit der anderen Kathete gleich der Distanz. Genannter Kreis trifft die Flucht Q' in zweien Punkten $U_{q'}$ und $V_{q'}$, welche als Fluchtpunkte der gesuchten Geraden dienen können.

Die centralen Projektionen dieser Geraden sind daher die Verbindungslinien $U_{q'} a'$ und $V_{q'} a'$, siehe auch Erkl. 60, sowie in Aufgabe 16, I. Teil.

Aufgabe 52. Durch eine durch Spur A_s und Flucht $A_{q'}$ gegebene Gerade ist eine Ebene zu legen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel W von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Auflösung. Man lege zunächst durch die Verbindungslinie $oA_{q'}$, siehe Figur 87, eine Ebene der verlangten Art, so berührt deren Spur einen Kreis K' mit o_2 als Mittelpunkt und einem Halbmesser $o_1 s$ gleich der dem Winkel W anliegenden Kathete eines rechtw. Dreiecks mit der anderen Kathete gleich der Distanz, und geht durch $A_{q'}$. Die genannten Spuren sind somit die Tangenten Q' und Q'_0 durch $A_{q'}$ an K' und bilden die Fluchten der gesuchten Ebenen, ihre Spuren S und S_0

Figur 87.



Aufgabe 53. Ein senkrechter Kreiskegel von gegebener Höhe, der mit seiner Grundfläche in der Horizontalebene liegt, ist in centraler Projektion darzustellen; ausserdem sind die auftretenden Schattengrenzen zu konstruieren, wenn der Kegel von parallelen Lichtstrahlen beleuchtet sein soll.

Erkl. 68. Hat man die vier Punkte $a^0 b^0 c^0 d^0$ auf die in Auflösung der Aufgabe 53 angegebene Weise bestimmt, so lassen sich die übrigen Punkte von K' auch unabhängig von K direkt wie folgt ermitteln.

Man überträgt die schon in Erkl 163, I. Teil, angegebene und in Figur 88 angedeutete Kreiskonstruktion centrisch collinear auf K'; zu diesem Zwecke braucht man nur durch d' die Parallele zu S durch b' nach o_2 zu ziehen und hierauf die Linien $d'e'$ und $d'm'$ central projektivisch in eine beliebige Zahl gleicher Teile zu teilen und die Teilpunkte auf $d'e'$ mit b', jene auf $d'm'$ mit a' zu verbinden, so schneiden sich die nach gleich benannten Teilpunkten gehenden Geraden in Punkten von K'. In gleicher Weise lassen sich auch die übrigen Punkte von K' ermitteln durch Benützung der Tangenten in d', a' und e'.

Das Viereck $d'e'b'm'$ entspricht centrisch-collinear dem Quadrate $d^0 e^0 b^0 m^0$; ähnlich entsprechen den drei noch übrigen Quadraten mit den Ecken d^0, a^0, c^0, b^0 die Vierecke mit den Ecken d', a', c', b'.

Erkl. 69. Ist der Kegel von parallelen Lichtstrahlen beleuchtet, so stellen sich dieselben in centraler Projektion dar, als gerade Linien mit gemeinsamem Fluchtpunkt $L_{q'}$, siehe Figur 88, dem Lichtstrahlenfluchtpunkt. Derselbe kann bei beliebiger Lichtrichtung ganz beliebig gewählt werden.

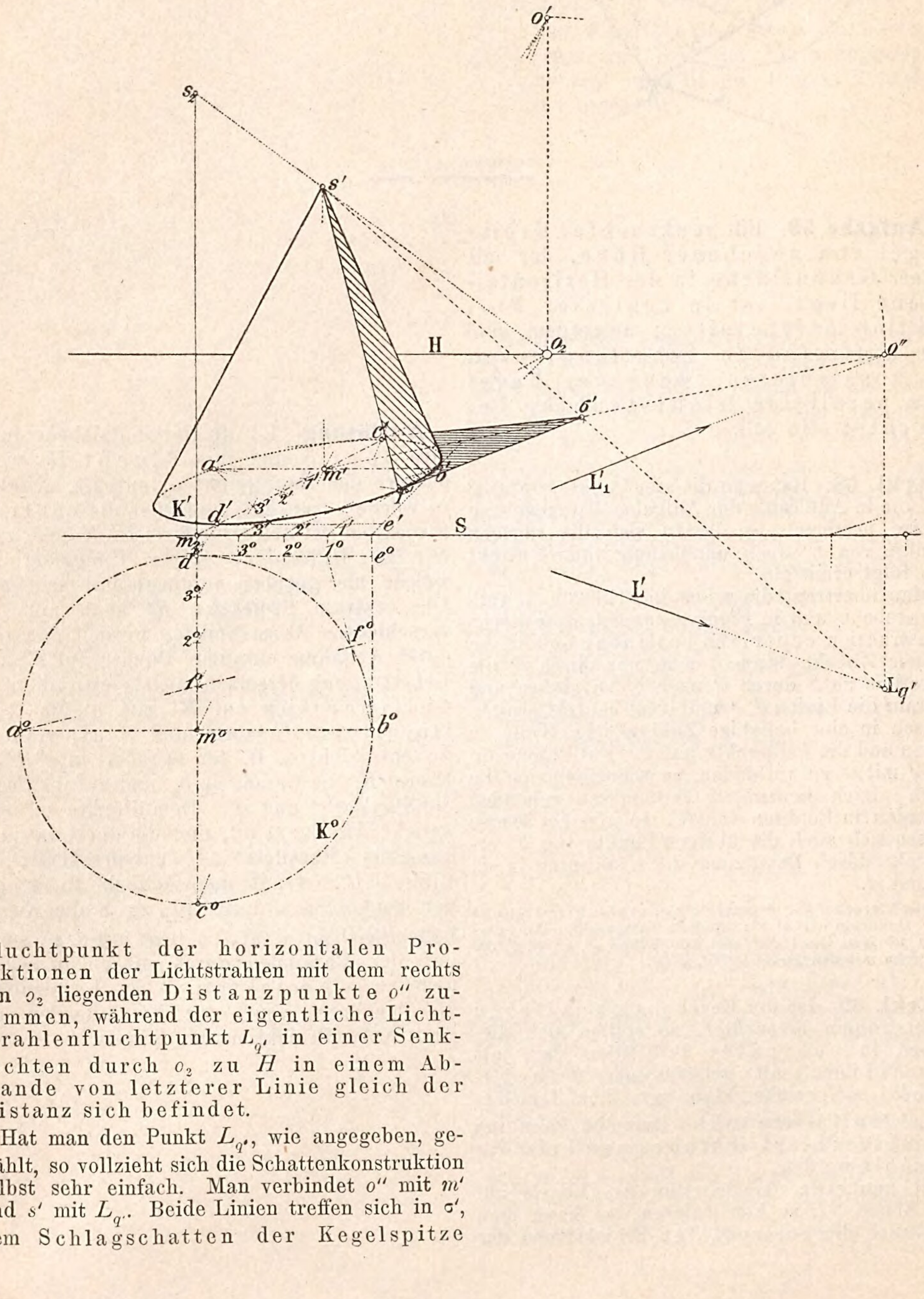
Ist nun etwa der Schatten des Kegels auf die Ebene SH zu konstruieren, so kann man sich auch die horizontalen Projektionen der gehen durch A_s parallel zu Q' und Q'_0 bezw.; vergleiche auch Aufgabe 19, sowie Erkl. 104, I. Teil.

Auflösung. Ist die Horizontalebene durch ihre Spur S und ihre Flucht H, welch letztere den Hauptpunkt o_2 enthält, gegeben, so zeichne man sich zunächst die centrale Projektion K' des Grundkreises K und zwar mit zu Hilfenahme seiner Umlegung K^0, welche als gegeben vorausgesetzt sein soll. Die centrale Projektion K' kann nun auf verschiedene Weise ermittelt werden, entweder durch Annahme einzelner Punkte auf K^0 und Uebertragung derselben mittels centrischer Collineation auf K' mit o' als Collineationscentrum und S als Achse. So entspricht z. B. der Geraden $m_2 c^0 d^0$ im Kreise K_0 die Gerade $m_2 o_2$ und auf ihr liegen die Punkte c' und d'. Dem Punkte m^0 entspricht der Punkt m', und die durch m' zu S gezogene Parallele ist entsprechend der Linie $a^0 b^0$. Trägt man endlich in m_2 auf der Senkrechten durch m_2 zu S die Kegelhöhe gleich $m_2 s_2$ ab, so liegt auf $o_2 s_2$, sowie auf der Parallelen durch m' zu $m_2 s_2$ die centrale Projektion s' der Kegelspitze; die Tangenten von s' an K' vollenden die centrale Projektion des Kegels.

Lichtstrahlen in centraler Projektion gegeben denken, gleichfalls als Gerade mit einem gemeinsamen Fluchtpunkt auf H, welcher bei ganz beliebiger Lichtrichtung ebenfalls ganz beliebig gewählt werden kann.

Bei der für technische Zeichnungen gewählten üblichen Lichtrichtung, siehe Antw. der Frage 68, II. Teil, fällt nun der

Figur 88.



Fluchtpunkt der horizontalen Projektionen der Lichtstrahlen mit dem rechts von o_2 liegenden Distanzpunkte o'' zusammen, während der eigentliche Lichtstrahlenfluchtpunkt $L_{q'}$ in einer Senkrechten durch o_2 zu H in einem Abstande von letzterer Linie gleich der Distanz sich befindet.

Hat man den Punkt $L_{q'}$, wie angegeben, gewählt, so vollzieht sich die Schattenkonstruktion selbst sehr einfach. Man verbindet o'' mit m' und s' mit $L_{q'}$. Beide Linien treffen sich in σ', dem Schlagschatten der Kegelspitze

auf die Horizontalebene. Die Tangenten durch σ' an K' bestimmen einerseits sowohl den Schlagschatten des Kegels auf die horizontale Ebene, anderseits gehen durch ihre Berührpunkte auf K' Gerade nach s', welche den Selbstschatten des Kegels begrenzen.

In der Figur 88 ist nur der sichtbare Berührpunkt f' sowie die sichtbare Linie $s'f'$ eingezeichnet.

Aufgabe 54. Von dem in Figur 89 in centraler Projektion dargestellten Körper kennt man die centrale Projektion a' der Ecke a, ferner Spur S und Flucht H der Ebene der quadratischen Grundfläche, die Lage A' der Kante ab, sowie die zur Darstellung des Körpers notwendigen Ausmasse. Man soll die centrale Projektion des Körpers zeichnen.

Auflösung. Zunächst erhält man durch Verlängerung der Linie A' im Schnitt mit H den Fluchtpunkt $A_{q'}$. Mittels der Umlegung o' des **Pr. C.** ($\overline{o_2\, o'}$ gleich der Distanz) und der Senkrechten $o'B_{q'}$ ergibt sich auf H der Fluchtpunkt $B_{q'}$ für alle auf der Geraden A senkrechten und in der Ebene SH liegenden oder zu ihr parallelen Geraden. Mittels der Kreise durch o' um die Punkte $A_{q'}$ und $B_{q'}$ als Mittelpunkte gewinnt man die Teilungspunkte A_t und B_t für die Geraden mit den Fluchtpunkten $A_{q'}$ und $B_{q'}$.

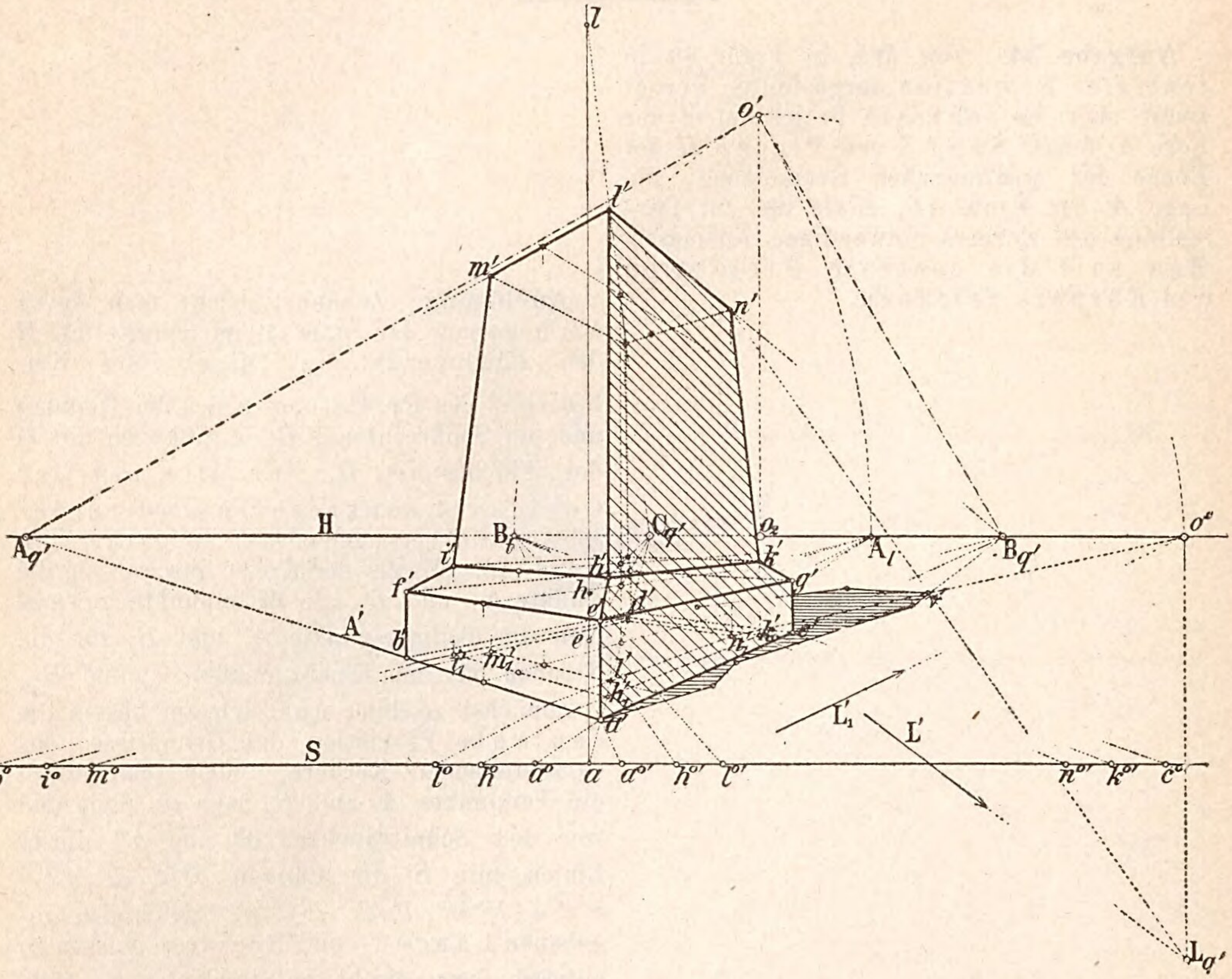
Zunächst zeichnet man sich am besten die centrale Projektion des Grundrisses des darzustellenden Körpers, indem man durch die Teilpunkte A_t und B_t nach a' zieht und von den Schnittpunkten a^0 und $a^{0'}$ dieser Linien mit S die Längen $\overline{a^0 b^0} = \overline{a^0 c^{0'}}$, $\overline{h^0 i^0} = \overline{h^{0'} k^{0'}}$, $\overline{l^0 m^0} = \overline{l^{0'} n^{0'}}$ gleich den gegebenen Längen- und Breiten-Massen so abträgt, dass sowohl die Strecken $\overline{a^0 b^0}$, $\overline{h^0 i^0}$, $\overline{m^0 n^0}$ und $\overline{a^{0'} c^{0'}}$, $\overline{h^{0'} k^{0'}}$, $\overline{l^{0'} n^{0'}}$ gemeinsamen Mittelpunkt besitzen.

Die Verbindung der so erhaltenen Punkte auf S mit den zugehörigen Teilungspunkten liefert die Ecken h'_1, i'_1, k'_1, l'_1, m'_1, n'_1 des Grundrisses, woraus sich mittels der Fluchtpunkte $A_{q'}$ und $B_{q'}$ die centralen Projektionen der noch übrigen Ecken des Grundrisses ergeben.

Bestimmt man endlich noch den Fluchtpunkt $C_{q'}$ der Quadratdiagonale $a'd'$ und trägt von dem Schnittpunkt a der Linie $a'd'$ mit S auf der Senkrechten al zu S die Höhenmasse $\overline{ae}$, $\overline{ah}$ und $\overline{al}$ ab, so treffen sich die Verbindungslinien der Punkte e, h und l mit $C_{q'}$ und die Senkrechten durch die Ecken a', h'_1 und l'_1 in den centralen Pro-

jektionen e', h' und l' der Ecken des darzustellenden Körpers. Auf den Verbindungslinien der eben genannten Punkte mit den zugehörigen Fluchtpunkten $A_{q'}$ und $B_{q''}$, sowie auf der bezüglichen Senkrechten S durch die Grundrisseckpunkte liegen die noch fehlenden Ecken des Körpers.

Figur 89.



Was die Konstruktion der Schattengrenzen anbetrifft, so ist dieselbe ähnlich wie in Aufgabe 53 durchzuführen. Wenn durch o'' und $L_{q'}$ die Fluchtpunkte für die Lichtstrahlen so wie in der vorhergehenden Aufgabe gegeben sind, so bestimmt sich hiedurch der Linienzug $a' e' h' l' n'$ als Schattenkante, siehe Anmerkung 29, II. Teil, und damit die schraffierten Flächen als im Selbstschatten befindlich. Hiedurch ist aber auch der Schlagschatten auf die Ebene S bestimmt, von welchem die Konstruktion eines Punktes, nämlich des Punktes ν' als Schlagschatten des Punktes n' angedeutet ist.

$n'_1 o''$ und $n' L_{q'}$ schneiden sich in ν'.

f) Senkrechtstehen einer Geraden zu einer Ebene.

Frage 47. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung durch einen gegebenen Punkt

a) eine Gerade senkrecht zu einer Ebene,

b) eine Ebene senkrecht zu einer Geraden?

Erkl. 70. Sämtliche zur Ebene SQ' senkrechten Geraden enthalten den gemeinsamen Fluchtpunkt $N_{q'}$, welcher aus diesem Grunde auch der „Normalenfluchtpunkt" der Ebene heisst. Wie aus der in der Antw. der Frage 17 ausgeführten Konstruktion hervorgeht, liegt der Normalenfluchtpunkt einer Ebene stets auf der Verbindungslinie von deren Nebenhauptpunkte mit dem Hauptpunkte und hat von letzterem eine ganz bestimmte Entfernung, abhängig von der Grösse der Distanz und von der Entfernung zwischen Nebenhauptpunkt und Hauptpunkt. Es ist nämlich aus der Figur 90 unmittelbar die Verhältnisgleichheit zu entnehmen:

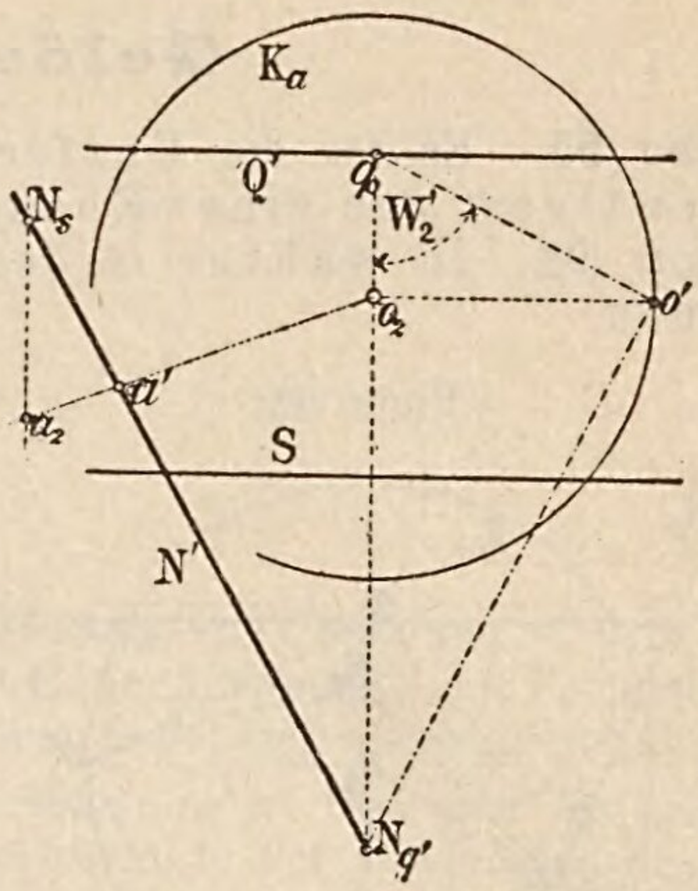
$$\frac{\overline{q_0 o_2}}{\overline{o_2 o'}} = \frac{\overline{o_2 o'}}{\overline{o_2 N_{q'}}}$$

oder

$$o_2 N_{q'} = \frac{\overline{o_2 o'^2}}{\overline{q_0 o_2}} \quad \ldots \quad 8)$$

Antwort a. Ist eine Ebene durch Spur S und Flucht Q', siehe Figur 90, gegeben, und soll durch einen willkürlich gewählten Punkt a eine Senkrechte zur Ebene SQ' gezogen werden, so kann man zunächst durch das **Pr. C.** o eine Senkrechte zur Ebene ziehen und zwar mittels des Konstruktionsdreiecks von $o_2 o' q_0$ von o; die Senkrechte $o' N_{q'}$ zu dessen Hypotenuse $o' q_0$ gibt die Umlegung der genannten Senkrechten und

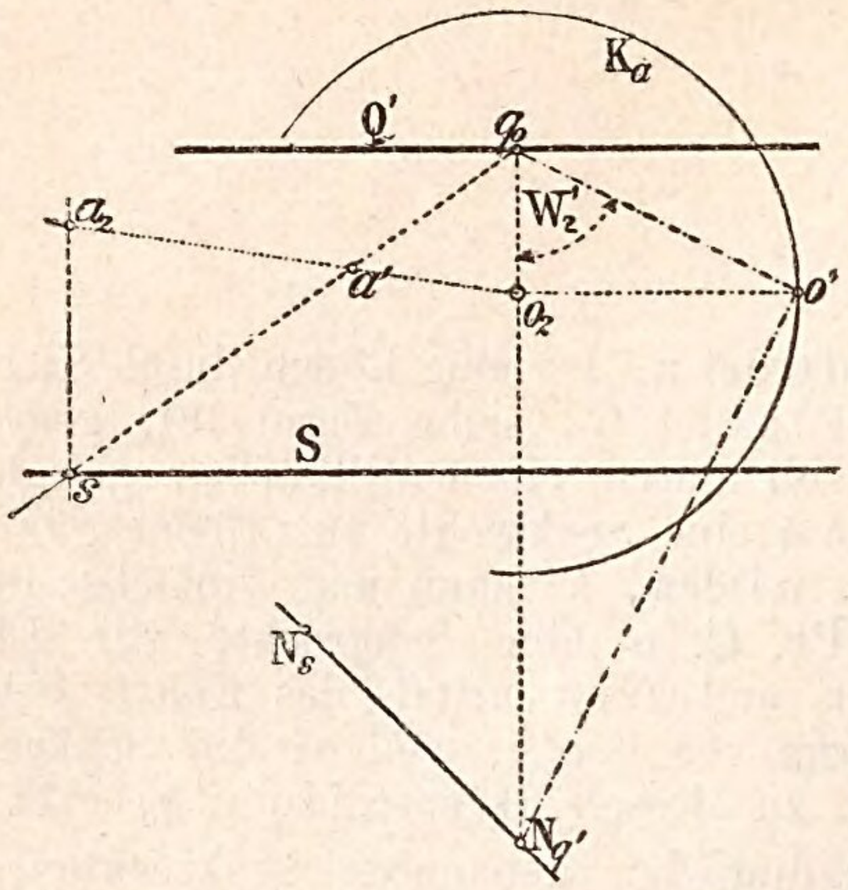
Figur 90.



schneidet die verlängerte Kathete $q_0 o_2$ in einem Punkt $N_{q'}$ der **Pr. Eb.** Da nun sämtliche Senkrechten zur Ebene SQ' zu einander parallel sind, so besitzen dieselben den nämlichen Fluchtpunkt, nämlich den Punkt $N_{q'}$. Die centrale Projektion der gesuchten Senkrechten durch a wird daher die Verbindungslinie $a' N_{q'}$ oder N' sein. Ihre Spur N_s ergibt sich mittels einer die Linie N' und den Punkt a enthaltenden zur **Pr. Eb.** senkrechten Ebene, als deren Flucht die Linie $o_2 N_{q'}$ anzusehen ist, während ihre Spur hiezu parallel durch a_2 geht und auf N' den Punkt N_s ausschneidet.

Antwort b. Ist durch $N_s N_{q'}$ die Gerade, durch $a_2 a'$ der Punkt a gegeben, durch welchen eine Ebene senkrecht zur Geraden $N_s N_{q'}$ gelegt werden soll, so bestimmt sich mit Bezug auf die Antwort a

Figur 91.

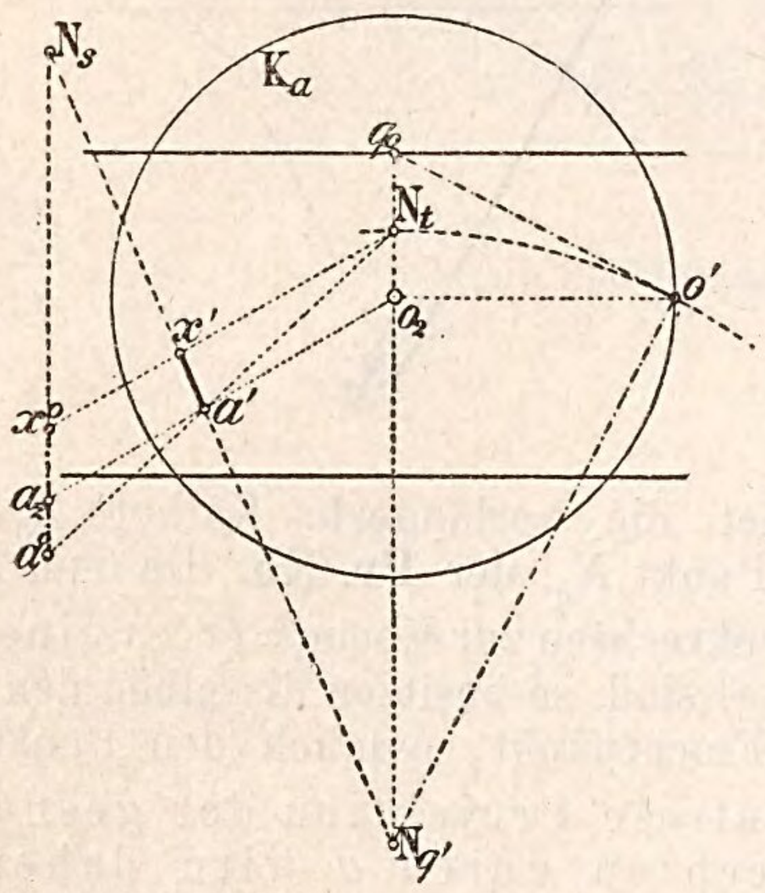


der Frage 47, sowie Erkl. 70 der Nebenhauptpunkt q^0 der Ebene mittels des rechtwinkligen Dreiecks $N_{q'} q_0 o'$, von welchem man die Lage der Hypotenuse $N_{q'} q_0$ als Verbindungslinie von $N_{q'}$ mit dem Hauptpunkt, sowie die zur Hypotenuse gehörige Höhe $\overline{o_2 o'}$ gleich der Distanz kennt. Die Senkrechte durch q_0 zur genannten Hypotenuse gibt die Flucht der gesuchten Ebene. Mittels der Geraden $a' q_0$, letztere als Gerade der gesuchten Ebene aufgefasst, bestimmt sich ein Punkt s der Spur S der letzteren, da die genannte Gerade zugleich einer zur **Pr. Eb.** senkrechten Ebene angehört, deren Flucht die Verbindungslinie $q_0 N_{q'}$ ist, während ihre Spur parallel hiezu durch a_2 geht und auf $q_0 a'$ den Punkt s ausschneidet.

Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 55. Es ist die Entfernung eines Punktes a von einer Ebene SQ', siehe Figur 92, in wahrer Grösse zu bestimmen.

Figur 92.

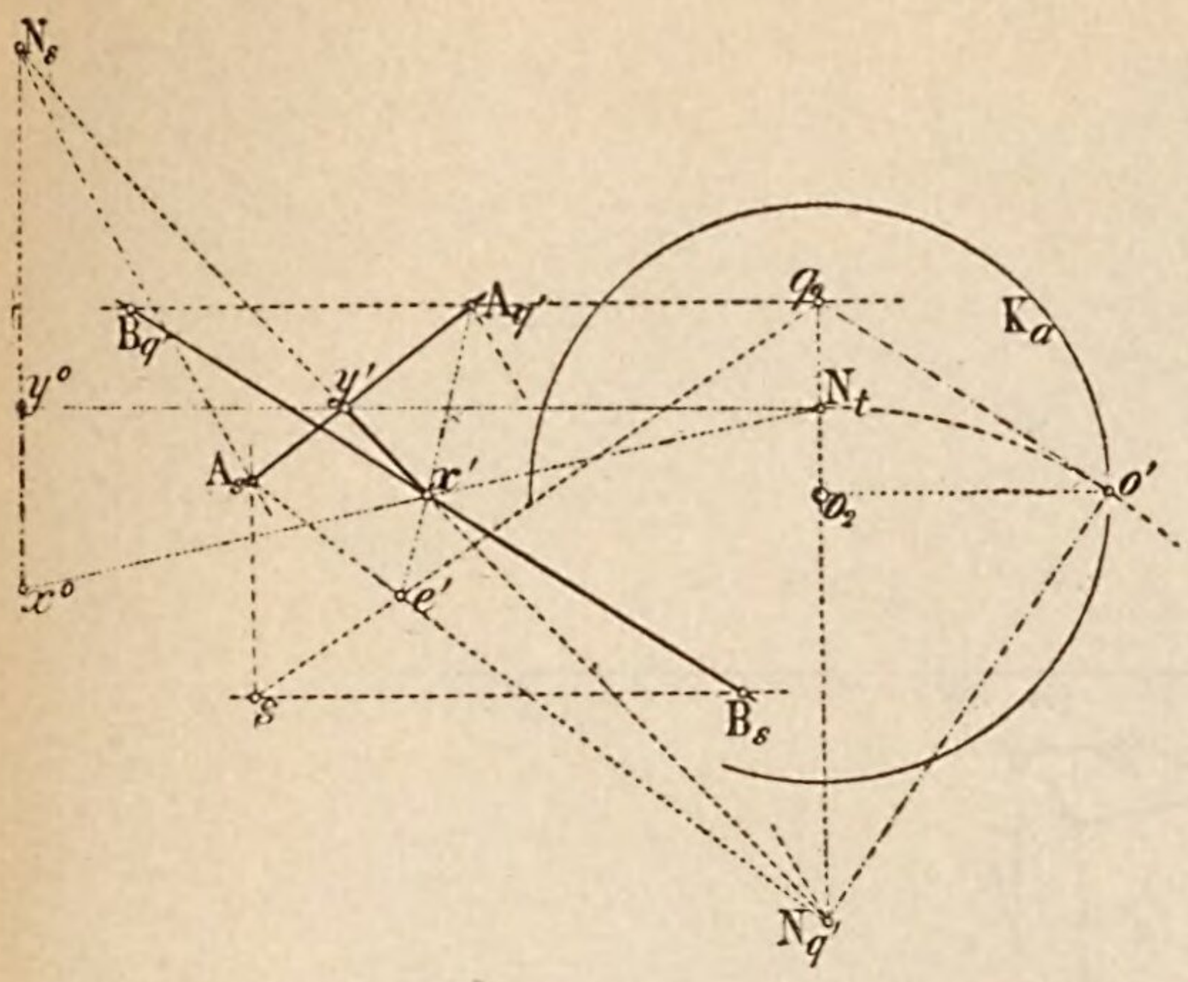


Auflösung. Man konstruiere, wie in Antwort a der Frage 47, Flucht und Spur der Senkrechten durch a zur Ebene SQ' (NB. die Bezeichnung SQ' ist in Figur 92 aus Versehen weggelassen worden, doch ist ein Irrtum bezüglich der genannten Linien nicht wohl möglich), sowie deren Schnittpunkt x' mit der Ebene SQ', siehe Antwort der Frage 44, sowie Erkl. 60. Mittels des Teilungspunktes N_t der Geraden $N_s N_{q'}$ ergibt sich dann in der Strecke $\overline{a^0 x^0}$ die Entfernung des Punktes a von der Ebene SQ' in wahrer Grösse.

Aufgabe 56. Man soll die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden A und B, siehe Figur 93, sowie jene Gerade konstruieren, welche die Gerade A und B senkrecht schneidet.

Auflösung. Man führe die Konstruktion in gleicher Weise durch wie in Aufgabe 23, I. Teil, d. h. man lege durch die Gerade B eine Ebene parallel zur Geraden A; ihre Flucht ist die Verbindungslinie $A_{q'} B_{q'}$, siehe Figur 93, ihre Spur geht durch B_s parallel zur Flucht $A_{q'} B_{q'}$ und fälle von einem beliebigen

Figur 93.

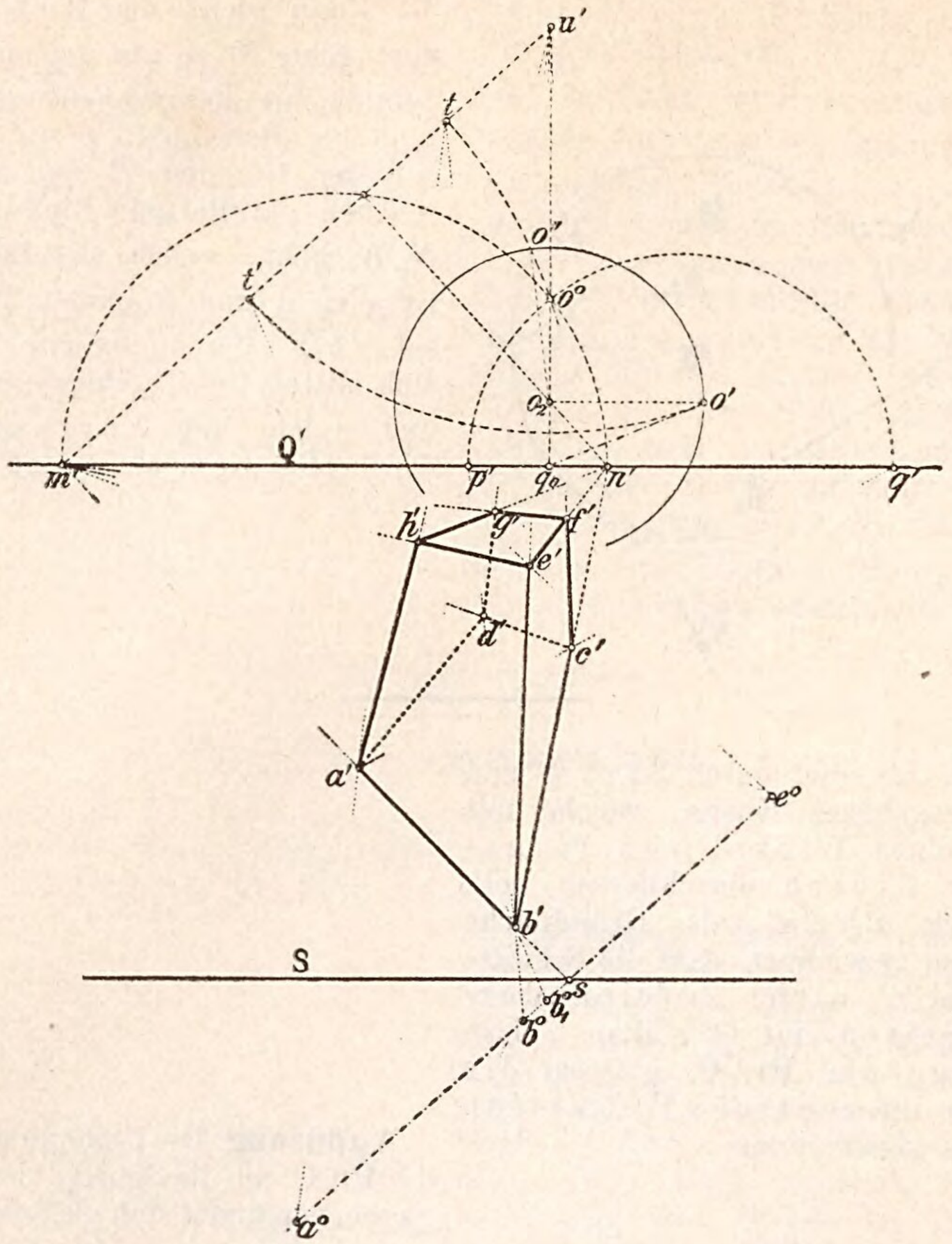


Aufgabe 57. In einer durch Spur S und Flucht Q' gegebenen Ebene, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliessen soll, ist ein Viereck $a'b'c'd'$ als Grundfläche eines Würfels so gezeichnet, dass die Schnittpunkte m' und n' nicht aufeinanderfolgender Seiten auf Q' fallen. Man soll die Lage des **Pr. C.** gegen die **Pr. Eb.**, sowie die centrale Projektion des Würfels konstruieren.

Punkte der Geraden A, als solcher wurde in der Figur gleich der Punkt A_s gewählt, eine Senkrechte $N_{q'}A_s$ zur genannten Ebene, deren Schnitt mit dieser Ebene den Punkt e ergibt, eine Parallele durch e zur Geraden A liefert auf der Geraden B den Punkt x', durch welchen parallel zur Linie $A_sN_{q'}$ die Gerade $N_{q'}N_s$ geht, welche die beiden windschiefen Geraden A und B in den Punkten x' und y' schneidet, deren wahre Entfernung $\overline{x^0y^0}$ sich mittels des Teilungspunktes N_t bestimmt, und welche die kürzeste Entfernung der beiden Geraden A und B darstellt.

Auflösung. Die Umlegung o^0, siehe Figur 94, des **Pr. C.** um die Spur Q' der Parallelebene zur gegebenen findet sich als Schnittpunkt der über den Strecken $\overline{m'n'}$ und $\overline{p'q'}$ (p' und q' sind die Fluchtpunkte der Diagonalen des Vierecks $abcd$) als Durchmesser beschriebenen Kreise. Trägt man in q_0 an die Senkrechte durch o^0 zu Q' den gegebenen Winkel an, so liegt auf dessen zweitem Schenkel q_0o' in einer Entfernung von q_0 gleich q_0o^0 der Punkt o', aus welchem sich o_2 ergibt. Bestimmt man ferner den Normalenfluchtpunkt u' der Ebene SQ', so gehen die centralen Projektionen der die Ecken a' bis d' enthaltenden Würfelkanten durch u', und man hat nur noch nötig auf einer derselben, etwa auf $b'e'$, die Länge der Würfelkante in centraler Projektion aufzutragen, zu welchem Zwecke man sich die Teilpunkte t und t' der Linien $m'b'$ und $b'u'$, etwa gleich auf $m'u'$, ermittelt, durch die Spur s von ab die Parallele zu $m'u'$ zieht, wodurch man auf der zuletzt genannten Parallelen mittels der Verbindungslinien ta' und tb' die wahre Länge $\overline{a^0b^0}$ der Würfelkante gewinnt. Durch Ziehen von $t'b'b^0_1$ und Abtragen der Strecke $\overline{b^0_1e^0} = \overline{b^0a^0}$ erhält man im Schnitt von e^0t' und $b'u'$ die eine

Figur 94.



Ecke e' der zur Ebene SQ' parallelen Würfelfläche, aus welcher sich mit Benützung der Fluchtpunkte m' und n' auch die noch fehlenden Ecken h', f' und g' konstruieren lassen.

Aufgabe 58. Von einem Parallelepipedon kennt man Spur und Flucht der Grundfläche, sowie die Ecken a', b', c', d' der letzteren, siehe Figur 95, desgleichen den Fluchtpunkt r' der Seitenkanten, sowie eine Ecke $\mathfrak{b}'$ der zweiten Grundfläche. Man soll die centrale Projektion des Körpers darstellen, denselben durch eine Ebene TV' schneiden und die wahre Gestalt der Schnittfigur konstruieren.

Auflösung. Da die Seitenkanten sämtlich den Fluchtpunkt r' besitzen und ausserdem die zweite Grundfläche $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ parallel zur Grundfläche $abcd$ läuft, so sind die beiden Figuren $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'\,\mathfrak{d}'$ und $a'b'c'd'$ centrisch

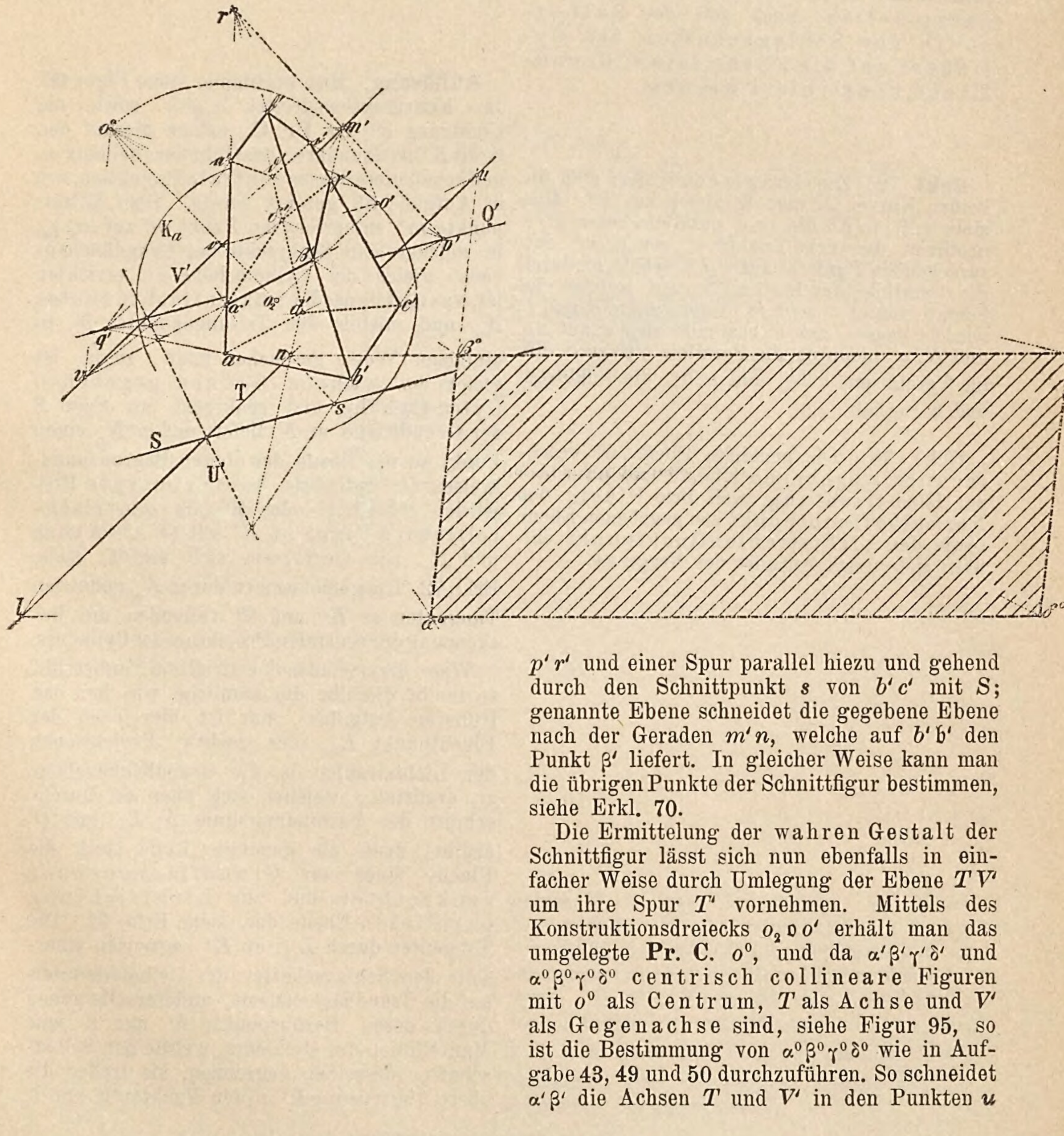
Erkl. 71. Die gesuchte Schnittfigur lässt sich andererseits, sobald man einen Punkt, etwa β, von ihr kennt, auch als centrisch collineare Figur zur Figur $a'b'c'd'$ mit r' als Centrum und der Schnittlinie U' der Ebene SQ' und TV' bestimmen, siehe auch Frage und Antw. 17, II. Teil.

Die Konstruktion ist in der Figur mehrfach angedeutet. So schneidet z. B. die Verlängerte $b'c'$ die U' in einem Punkte, durch welchen die Linie $\beta'\gamma'$ hindurchgeht und somit den Punkt γ' enthält.

collinear mit r' als Centrum und Q' als Achse und ist die centrische Collineation mittels eines Paares entsprechender Punkte b' und $\mathfrak{b}'$ vollständig bestimmt.

Behufs Ermittelung des Schnittes der Ebene TV' mit dem Körper bestimmt man die Durchschnitte der einzelnen Körperkanten mit der schneidenden Ebene. Die Konstruktion ist für die Körperkante $b'\mathfrak{b}'$ angedeutet. Die Kante $b'\mathfrak{b}'$ liegt mit der Grundkante $b'c'$ in einer Ebene mit der Flucht

Figur 95.



$p'r'$ und einer Spur parallel hiezu und gehend durch den Schnittpunkt s von $b'c'$ mit S; genannte Ebene schneidet die gegebene Ebene nach der Geraden $m'n$, welche auf $b'\mathfrak{b}'$ den Punkt β' liefert. In gleicher Weise kann man die übrigen Punkte der Schnittfigur bestimmen, siehe Erkl. 70.

Die Ermittelung der wahren Gestalt der Schnittfigur lässt sich nun ebenfalls in einfacher Weise durch Umlegung der Ebene TV' um ihre Spur T' vornehmen. Mittels des Konstruktionsdreiecks $o_2\,\mathfrak{o}\,o'$ erhält man das umgelegte **Pr. C.** o^0, und da $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ und $\alpha^0\beta^0\gamma^0\delta^0$ centrisch collineare Figuren mit o^0 als Centrum, T als Achse und V' als Gegenachse sind, siehe Figur 95, so ist die Bestimmung von $\alpha^0\beta^0\gamma^0\delta^0$ wie in Aufgabe 43, 49 und 50 durchzuführen. So schneidet $\alpha'\beta'$ die Achsen T und V' in den Punkten u

und v', durch u geht parallel zu $o^0 v'$ die Linie $\alpha^0 \beta^0$ und enthält auf den Verbindungslinien $o^0 \alpha^0$ und $o^0 \beta^0$ die Punkte α^0 und β^0.

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung muss sich die Figur $\alpha^0 \beta^0 \gamma^0 \delta^0$ als Parallelogramm ergeben.

Aufgabe 59. Ein senkrechter Kreiscylinder, der mit seiner Grundfläche in einer durch Spur und Flucht gegebenen Ebene aufliegt und dessen Ausmasse bekannt sein sollen, ist in centraler Projektion darzustellen; auch soll der Selbst- sowie der Schlagschatten des Cylinders auf die Ebene seiner Grundfläche konstruiert werden.

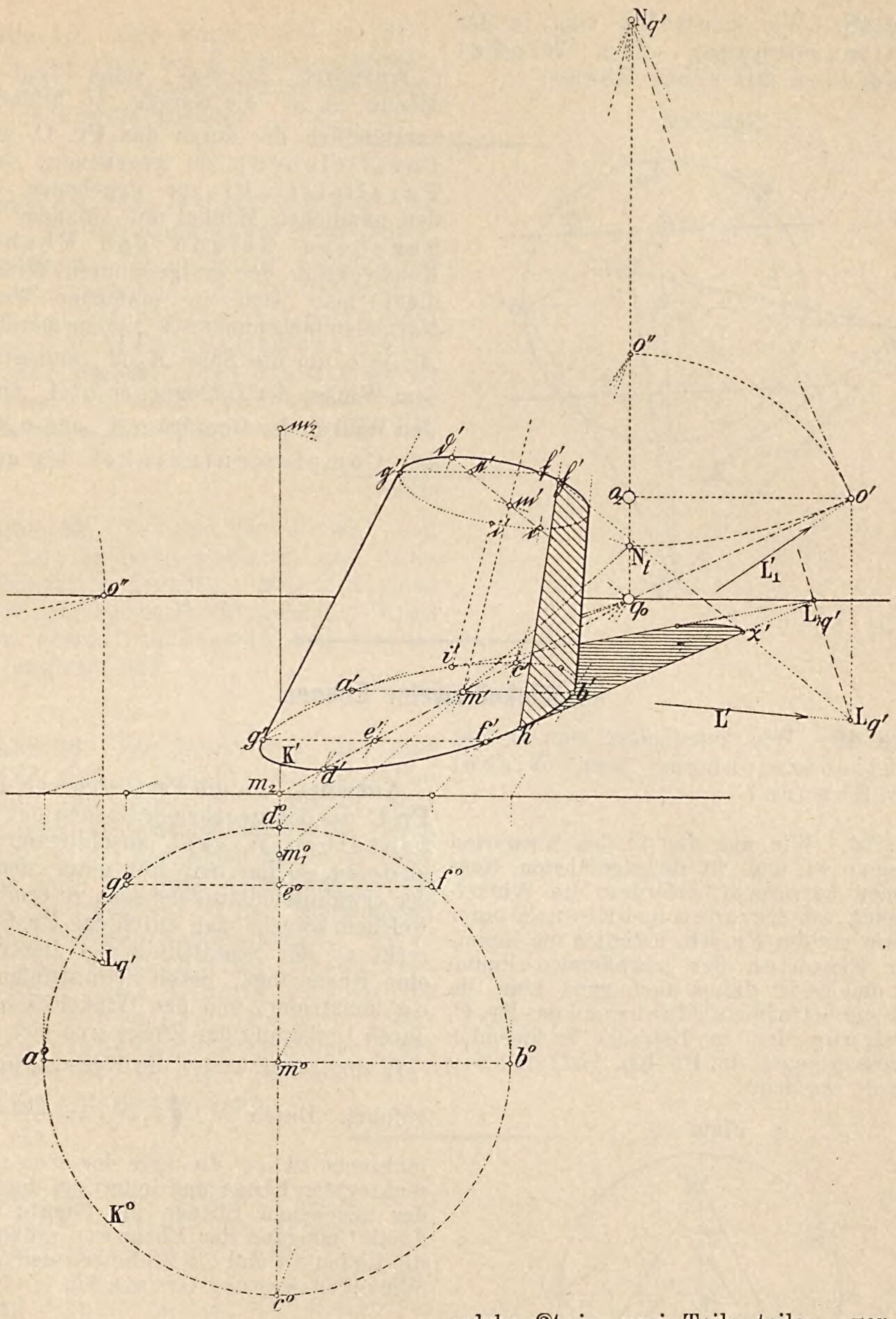
Erkl. 72. Zweckmässig konstruiert man die beiden Kurven K' und $\mathfrak{K}'$ gleich aus K^0. Man ziehe z. B. in K^0 die zu S parallele Sehne $g^0 f^0$, bestimmt den dem Punkte e^0 von $m_2 m^0$ entsprechenden Punkt e' auf $m_2 q^0$, erhält hiedurch die Parallele durch e' zu S, auf welcher im Schnitt von $g^0 o''$ und $f^0 o''$ die Punkte g' und f' von K' liegen; aus e' bestimmt sich $\mathfrak{e}'$ auf $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ und $N_{q'} e'$, hiedurch die Parallele $\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'$ zu S, die im Verein mit $g' N_{q'}$ und $h' N_{q'}$ die Punkte $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}'$ enthält.

Erkl. 73. Die genannte Ebene ist senkrecht zur gegebenen Ebene und parallel zur Lichtrichtung, weil ihre Flucht den Normalenfluchtpunkt zur gegebenen Ebene sowie den Lichtstrahlenfluchtpunkt enthält, siehe auch Antwort der Frage 44.

Auflösung. Man bestimme, siehe Figur 96, das Konstruktionsdreieck $o_2 q^0 o'$ sowie die Umlegung o'' des **Pr. C.**, nehme hierauf den Kreis K^0 als Grundkreis des Cylinders beliebig an und konstruiere dessen centrale Projektion, wie in Aufgabe 53 gezeigt wurde. Dem Mittelpunkte m^0 entspricht ein Punkt m' auf $m_2 q_0$, in welchem eine Senkrechte zur Grundflächenebene gleich der Cylinderhöhe zu errichten ist, was mittels des Normalenfluchtpunktes $N_{q'}$ und mittels des Teilungspunktes N_t in einfacher Weise geschehen kann. $\overline{m_2 \mathfrak{m}_2}$ ist gleich der wahren Grösse gegebenen Cylinderhöhe und senkrecht zur Spur S der Grundfläche, $\mathfrak{m}_2 N_t$ liefert auf $m' N_{q'}$ einen Punkt $\mathfrak{m}'$ der Ebene des oberen Begrenzungskreises des Cylinders, dessen centrale Projektion $\mathfrak{c}'\mathfrak{h}'\mathfrak{f}'\mathfrak{d}'\mathfrak{g}'$ oder $\mathfrak{K}'$ als centrisch-collineare Figur zu K' mit Q' als Achse und $N_{q'}$ als Centrum sich ergibt, siehe Erkl. 72. Die gemeinsamen durch $N_{q'}$ gehenden Tangenten an K' und $\mathfrak{K}'$ vollenden die Begrenzung der centralen Projektion des Cylinders.

Was die Schattenkonstruktion anbetrifft, so bleibt dieselbe die nämliche wie bei den früheren Aufgaben, nur ist hier noch der Fluchtpunkt $L_{1q'}$ der rechtw. Projektionen der Lichtstrahlen in die Grundflächenebene zu ermitteln, welcher sich aber als Durchschnitt der Verbindungslinie $N_{q'} L_{q'}$ mit Q' ergibt, denn die genannte Linie stellt die Flucht einer zur Grundflächenebene senkrechten und zur Lichtrichtung parallelen Ebene dar, siehe Erkl. 72. Die Tangenten durch $L_{1q'}$ an K' begrenzen einerseits den Schlagschatten des Cylindermantels auf die Grundflächenebene, andererseits gehen durch deren Berührpunkte h' und i' jene Mantellinien des Cylinders, welche den Selbstschatten desselben begrenzen, sie treffen die obere Abgrenzung $\mathfrak{K}'$ in den Punkten $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{i}'$,

Figur 96.

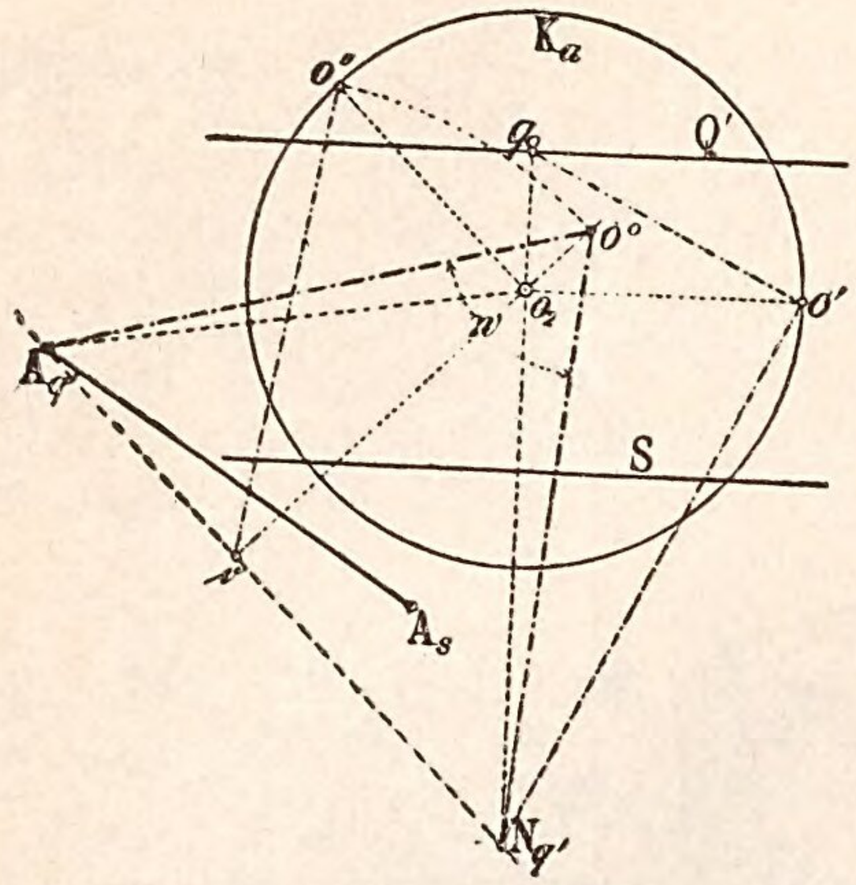


welche $\mathfrak{K}'$ in zwei Teile teilen, von denen der rechter Hand befindliche $\mathfrak{h}'c'i'$ zur Schattengrenze gehört und aus diesem Grunde Schlagschatten auf der Grundflächenebene erzeugt. In der Figur ist die Konstruktion des Punktes χ' angedeutet ($h'L_{1q'}$ und $\mathfrak{h}'L_{q'}$ schneiden sich in χ'; in gleicher Weise bestimmen sich die übrigen Punkte des gekrümmten Schlagschattens).

g) Winkel einer Geraden mit einer Ebene.

Frage 48. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung den Winkel einer Geraden mit einer Ebene?

Figur 97.



Antwort. Ist SQ', siehe Figur 97, die Ebene, $A_s A_{q'}$ die Gerade, so bildet selbstverständlich die durch das **Pr. C.** gezogene Parallelebene zur gegebenen, sowie der Parallelstrahl zur gegebenen Geraden den nämlichen Winkel mit einander wie die gegebene Gerade und Ebene. Zur Konstruktion des erstgenannten Winkels bedient man sich in einfacher Weise des Normalenfluchtpunktes $N_{q'}$, indem man die Ebene $A_{q'} N_{q'} o$ um die Spur $A_{q'} N_{q'}$ umlegt und in dem Winkel der Umlegungen $o^0 A_{q'}$ und $o^0 N_{q'}$ den Winkel der Geraden $o A_{q'}$ und $o A_{q''}$, d. h. den Complementswinkel des gesuchten erhält.

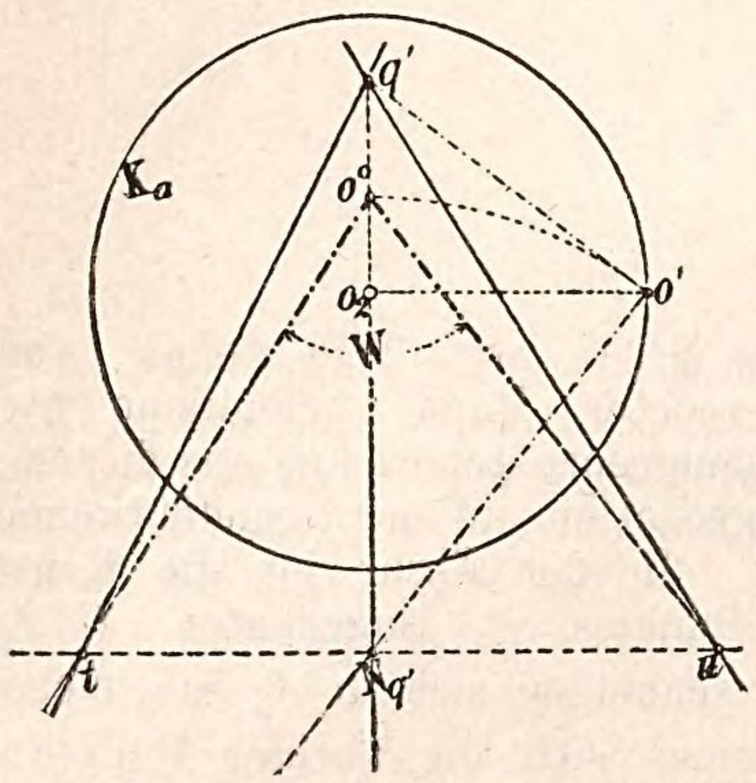
---

h) Winkel zweier Ebenen.

Frage 49. Wie konstruiert man in der Projektionszeichnung den Winkel zweier Ebenen?

Erkl. 74. Wie aus den in den Antworten der Fragen 48 und 49 durchgeführten Konstruktionen hervorgeht, erfordert die Winkelbestimmung von Geraden und Ebenen unter sich sowie mit der **Pr. Eb.** lediglich die Kenntnis der Fluchten der betreffenden Raumgrössen und es ist dieses auch ganz klar, da ja durch die betreffende Flucht und das **Pr. C.** die Neigung der in Betracht kommenden Raumgrössen gegen die **Pr. Eb.** vollständig bestimmt erscheint.

Figur 98.



Antwort. Da die Parallelebenen durch das **Pr. C.** zu den gegebenen Ebenen mit einander denselben Winkel einschliessen wie die letzteren, so hat man nur nötig, den Winkel der erwähnten Parallelebenen zu ermitteln, zu welchem Zwecke man durch das **Pr. C.** o senkrecht zu der Schnittlinie oq' dieser Ebenen eine Ebene legt, deren Schnittlinien ot und ou konstruiert und den Winkel dieser Linien durch Umlegung der Ebene uto sich zeichnet.

In der Figur 98 ist die Konstruktion durchgeführt. Durch $N_{q'}$ $\left(o_2 N_{q'} = \frac{\overline{o_2 o'}^2}{\overline{o_2 q'}}\right)$ geht senkrecht zu $o_2 q'$ die Spur der eben genannten senkrechten Ebene und liefert auf den Fluchten der gegebenen Ebenen die Punkte t und u; durch Umlegung der Ebene otu erhält man o^0; die Linien $o^0 t$ und $o^0 u$ schliessen den gesuchten Winkel in wahrer Grösse ein.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 60. Drei Punkte sind je durch centrale und rechtw. Projektion gegeben. Man soll die centrale Projektion des durch sie gelegten Kreises zeichnen.

Aufgabe 61. Ein Viereck $a' b' c' d'$ der **Pr. Eb.** ist als Centralprojektion eines Rechtecks gezeichnet, dessen Seiten $\overline{a\,b}$ und $\overline{b\,c}$ sich wie 2 : 1 verhalten. Es ist die wahre Gestalt des Rechtecks zu bestimmen, wenn sein Mittelpunkt ebenso weit hinter der **Pr. Eb.** liegt als das **Pr. C.** vor derselben und wenn ausserdem seine Ebene senkrecht zur **Pr. Eb.** steht.

Aufgabe 62. Es sind ein Punkt und eine Gerade je durch rechtw. und centrale Projektion gegeben. Man soll einen durch den gegebenen Punkt gehenden Kreis darstellen, dessen Punkte gleich weit von der Geraden entfernt sind.

Aufgabe 63. Ein Punkt $a' a_2$ und eine Ebene $S\,Q'$ sind in centraler Projektion dargestellt. Der Punkt a ist Spitze einer regelmässigen sechsseitigen Pyramide, deren Grundfläche in der gegebenen Ebene so liegt, dass eine Seite zur Spur S parallel läuft; die Höhe der Pyramide ist dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises gleich. Diese Pyramide ist durch eine gleichfalls durch Spur und Flucht gegebene Ebene zu schneiden und der hierdurch entstehende Stumpf, siehe Frage und Antwort 64, II. Teil, in centraler Projektion darzustellen.

Aufgabe 64. Drei gerade Linien A, B, C sind je durch centrale und rechtw. Projektion gegeben. Man soll eine Parallelepipedon darstellen, das die gegebenen Linien A, B, C zu Kanten hat.

Aufgabe 65. Eine Gerade und eine Ebene sind je durch Spur und Flucht gegeben. Man ermittele die wahre Entfernung des Verschwindungspunktes A_r der Geraden von der Ebene $S\,Q'$.

Aufgabe 66. Durch eine durch Spur und Flucht gegebene Gerade lege man eine Ebene, welche mit zweien gegebenen Ebenen gleiche Winkel einschliesst.

Aufgabe 67. Durch einen gegebenen Punkt ist eine Ebene senkrecht zu einer Ebene zu legen, welche mit der **Pr. Eb.** einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Aufgabe 68. Durch eine gegebene Gerade ist eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene einen Winkel von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Aufgabe 69. Es ist eine Gerade zu zeichnen, welche zwei windschiefe Gerade

a) unter dem gleichen Winkel,

b) unter Winkeln von vorgeschriebener Grösse schneidet.

Aufgabe 70. Von einem Würfel sind die Fluchtpunkte der drei Kantenrichtungen, die Kantenlänge, sowie eine Ecke durch centrale Projektion und Abstand von der **Pr. Eb.** gegeben. Man soll die centrale Projektion des Würfels zeichnen.

Aufgabe 71. Von einem Würfel mit gegebener Kantenlänge ist die centrale Projektion in der **Pr. Eb.** gezeichnet. Man soll das **Pr. C.**, sowie die rechtw. Projektion des Würfels zeichnen.

Aufgabe 72. Man löse die Aufgaben des I. und II. Teiles in centralprojektivischer Darstellung.

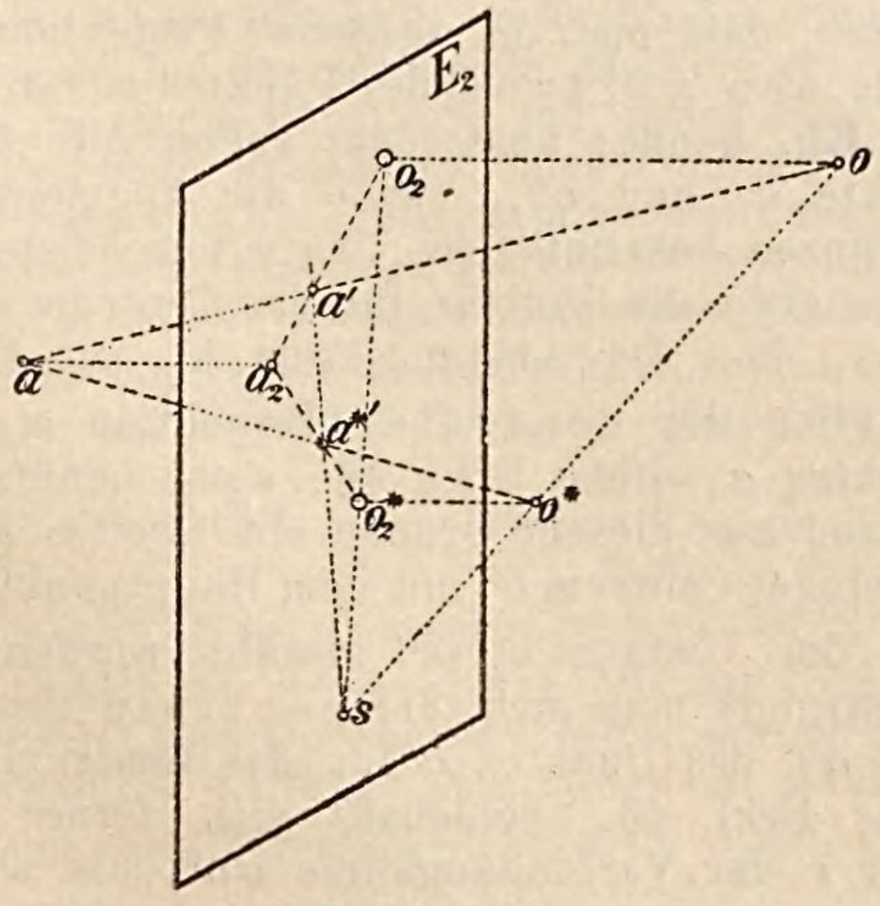
Anmerkung 10. Mittels des bisherigen ist man in der Lage, nicht nur die Centralprojektion jeder Raumgrösse, wenn deren Lage gegen die **Pr. Eb.** sowie ihre geometrischen Eigenschaften bekannt sind, darzustellen, sondern auch alle geometrischen Aufgaben, welche sich auf Lagen- und Massverhältnisse beziehen, in der Projektionszeichnung konstruktiv durchzuführen, sobald das **Pr. C.** durch seine Bestimmungsstücke, d. s. Augpunkt und Distanz gegeben ist. Freilich ist hiebei vorerst keine Rücksicht genommen auf die Beschaffenheit des entstehenden Bildes sowie auf etwa sich ergebende Ungenauigkeiten in der Konstruktion, infolge ungünstiger Lagenverhältnisse der zur Konstruktion benützten Punkte und Linien. Bei der Perspektive, d. h. jener speciellen Art der Centralprojektion, bei welcher das **Pr. C.** mit dem

Auge des Beschauers zusammenfällt, handelt es sich jedoch nicht nur darum, lediglich eine Projektion einer in Betracht kommenden Raumgrösse herzustellen, aus welcher auf die Form und Lage der Raumgrösse geschlossen werden kann, siehe Antw. der Frage 35 und 37, sondern man verlangt in erster Linie eine solche Form der Projektion der Raumgrösse, d. h. eine solche Abbildung derselben, dass letztere im Stande ist, die Raumgrösse selbst zu ersetzen. Mit anderen Worten, bei der Perspektive handelt es sich um eine möglichst getreue Abbildung der Raumgrösse, so dass der Beschauer mittels des perspektivischen Bildes sofort den räumlichen Gegenstand vor sich sieht, in dem das perspektivische Bild im Auge des Beschauers einen ähnlichen Eindruck hervorbringt wie die durch das Bild dargestellte Raumgrösse selbst.

Anmerkung 11. Um den in Anmerkung 10 angedeuteten Zweck zu erreichen, darf das **Pr. C.** bezw. dessen Abstand von der **Pr. Eb.**, d. h. die Distanz nicht mehr ganz willkürlich gewählt, sondern es muss eine gewisse Rücksicht auf die Grösse der darzustellenden Raumgrösse genommen werden. In diesem Fall erhält aber dann die Distanz in der Regel eine solche Grösse, dass der Abstandskreis und damit in Verbindung die zu einer bestimmten geometrischen Konstruktion nötigen Flucht- bezw. Teilungspunkte häufig jenseits der Grenze der zur Verfügung stehenden Zeichnungsfläche zu liegen kommen, und demgemäss die bisher kennen gelernten Konstruktionen versagen. Man hilft sich in diesem Falle durch Transformationen d. h. Lagenveränderungen des **Pr. C.** in bestimmter Weise, indem man ein neues, zweites der **Pr. Eb.** näher gelegenes **Pr. C.** wählt, für dasselbe die betreffende Konstruktion ausführt und nun einen Zusammenhang sucht für die centralen Projektionen derselben Raumgrösse hinsichtlich der beiden genannten **Pr. C.**, durch welche es ermöglicht wird, aus der einen centralen Projektion einer Raumgrösse die andere abzuleiten, ohne die infolge der zu grossen Distanz unzugänglichen Flucht- oder Teilungselemente benützen zu müssen. Im Folgenden soll dies gezeigt werden.

Frage 50. In welchem Zusammenhange stehen die centralen Projektionen einer Raumgrösse aus zweien Projektions-Centren o und o^*, siehe Figur 99, auf die nämliche **Pr. Eb.** E_2?

Figur 99.



Antwort. Ist, siehe Figur 99, a ein beliebiger Punkt im Raume, a' seine centrale Projektion aus dem Centrum o, $a^{*\prime}$ jene aus dem Centrum o^*, a_2 die rechtw. Projektion auf die **Pr. Eb.** E_2, so erkennt man zunächst leicht folgendes: Die Verbindungslinie $a'a^{*\prime}$ der centralen Projektionen eines Punktes a aus den Centren o und o^* auf die **Pr. Eb.** E_2 erscheint als Durchschnittslinie, d. h. als Spur der Ebene oo^*a und geht daher durch die Spur jeder Geraden dieser Ebene, somit auch durch die Spur s der Verbindungslinie oo^* beider Projektionscentra. Der Punkt s liegt aber auf der Verbindungslinie $o_2 o_2^*$ der beiden Hauptpunkte o_2 und o_2^* und ist äusserer Teilungspunkt der Strecke $\overline{o_2 o^*_2}$ im Verhältnis der Abstände der beiden Projektionscentra von der **Pr. Eb.** Für jeden der übrigen Punkte im Raume gilt hinsichtlich seiner centralen Projektionen aus den Centren o und o^* dasselbe. Man kann somit folgende Sätze aussprechen:

Erkl. 75. Ein besonders häufig eintretender Fall ist der, dass das zweite **Pr. C.** o^* in dem Hauptstrahl $o\,o_2$ etwa in o^*, siehe Figur 101, liegt. Es gelten selbstverständlich auch für diesen Fall die in der Antw. der Frage 50 genannten Sätze, mit der Einschränkung jedoch, dass der dort genannte Punkt s mit dem Hauptpunkt o_2 zusammenfällt.

„Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Centralprojektionen einer Raumgrösse aus zweien Centren o und o^* auf eine **Pr. Eb.** schneiden sich in der Spur s der Verbindungslinie $o\,o^*$ der beiden Projektionscentra."

„Ist die Raumgrösse eine ebene Figur, so sind deren Centralprojektionen aus zweien Centren o und o^* auf eine **Pr. Eb.** centrisch-collineare Figuren mit der oben genannten Spur als Collineationscentrum und der Spur der Ebene als Collineationsachse."

Sind insbesondere die beiden Projektionscentra gleichweit von der **Pr. Eb.** entfernt, so fällt die Spur s der Verbindungslinie $o\,o^*$ in unendliche Ferne und die oben genannten Sätze gehen in folgende über:

„Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Centralprojektionen einer Raumgrösse aus zweien gleichweit von der **Pr. Eb.** abstehenden Centren o und o^* auf eine **Pr. Eb.** laufen parallel zur Verbindungslinie $o_2 o^*_2$ der beiden Hauptpunkte o_2 und o^*_2."

„Ist die Raumgrösse eine ebene Figur, so sind deren Centralprojektionen aus zweien gleichweit von der **Pr. Eb.** abstehenden Centren o und o^* affine Figuren mit der Spur der Ebene als Affinitätsachse."

Frage 51. Wie bestimmt man mit Bezugnahme auf den in Antwort der Frage 50 zwischen zweien Centralprojektionen einer und derselben Raumgrösse auf die nämliche **Pr. Eb.** bei gegebener einer Projektion die andere?

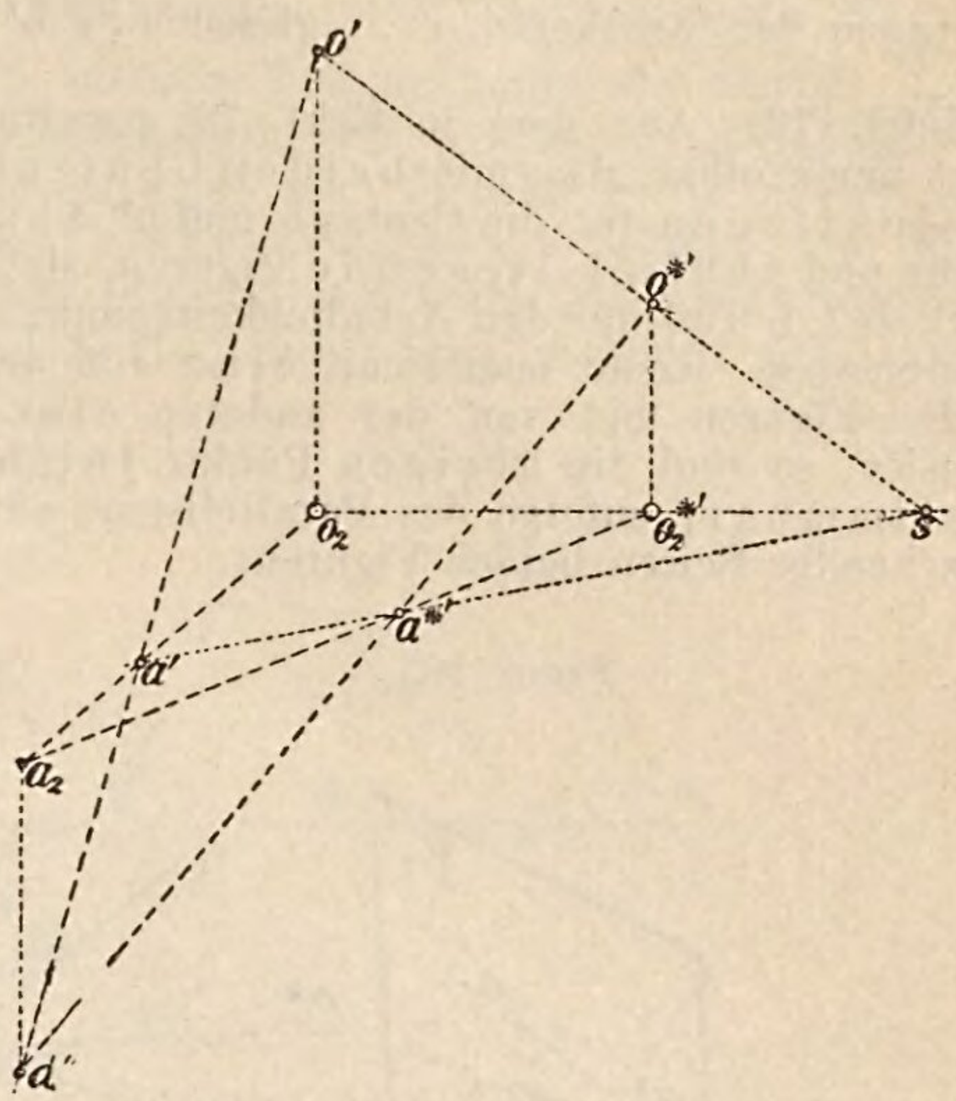
Erkl. 76. Hätte man das zweite Centrum o^* auf dem Hauptstrahle liegend angenommen, siehe Figur 101, so lässt sich in diesem Falle die centrale Projektion a' eines Punktes a und damit einer jeden Raumgrösse wie folgt leicht ermitteln. Zieht man nämlich von o^* nach a', so trifft diese Verbindungslinie die $a_2 a$ in einem Punkt $\frac{a}{3}$ derart, dass $\frac{\overline{o_2 o^*}}{\overline{a\,a}} = \frac{a_2 \frac{a}{3}}{a_2 a}$ ist, d. h. der Punkt a' kann auch aufgefasst werden als centrale Projektion eines Punktes $\frac{a}{3}$, der in der rechtw. Projizierenden des Punktes a sich befindet, und dessen Abstand von der **Pr. Eb.** zum Abstand des Punktes a sich verhält, wie der Abstand des Centrums o^* zu jenem von o. Man denkt sich somit eine Raumgrösse senkgross, dass der Abstandskreis K_a zur Konstruktion der centralen Projektion a' des Punktes a, siehe Erkl. 46, nicht benützbar ist und aus diesem Grunde ein zweites ganz beliebiges Centrum o^* mit dem Hauptpunkt o^*_2 und der Distanz $\overline{o_2{}^* o^{*\prime}}$ gewählt worden, so konstruiert man sich die centrale Projektion $a^{*\prime}$ des Punktes a für das Centrum o^*, siehe Erkl. 46, verschafft sich ferner die Spur s der Verbindungslinie $o\,o^*$, als äusseren Teilungspunkt der Strecke $\overline{o_2 o^*_2}$ im Verhältnis der gegebenen Distanzen, so liefert

Antwort. Es sei, siehe Figur 100, vorausgesetzt, dass man die rechtw. Projektion a_2, sowie den Abstand des Punktes a von der **Pr. Eb.** kenne; ausserdem sollen die Augpunkte o_2 und o^*_2, sowie die zugehörigen Distanzen bekannt sein. Wäre nun beispielsweise etwa die Distanz für das Centrum o so

recht zur **Pr. Eb.** der letzteren soviel mal näher gerückt als das Centrum o^* näher der **Pr. Eb.** liegt wie das Centrum o und projiziert die gegebene Raumgrösse aus dem Centrum o^* auf die **Pr. Eb.**; ihre Centralprojektion deckt sich mit der Centralprojektion der Raumgrösse in ihrer ursprünglichen Lage aus dem Centrum o.

In der Figur 102 ist die Konstruktion für einen Punkt a durchgeführt. Es ist vorausgesetzt, der Abstand des Centrums o^* betrage ein Drittel des Abstandes von o. Demgemäss ist um o_2 mit einem Halbmesser gleich ein Drittel der Distanz $\overline{o_2 o}$ der Kreis K_a beschrieben, und in demselben der beliebige Halbmesser $o_2 o'$ gezogen. Eine Parallele durch a_2 hiezu gleich ein Drittel des Abstandes $\overline{a_2 a'}$ des Punktes a von der **Pr. Eb.** bestimmt den Punkt $\frac{a}{3}$. Die Verbindungslinie $\frac{a}{3}\, o''$ liefert auf $a_2 o_2$ die gesuchte Centralprojektion des Punktes a aus dem Centrum o auf der **Pr. Eb.** Man sieht, bei dieser Annahme des Centrums o^* ist die Konstruktion des Punktes a^*, siehe Figur 102, gar nicht erforderlich, man erhält vielmehr unmittelbar die gewünschte Centralprojektion a'' die Verbindungslinie $s\, a^{*\prime}$ auf $a_2 o_2$ die gesuchte centrale Projektion a' des Punktes a für das **Pr. C.** o.

Figur 100.



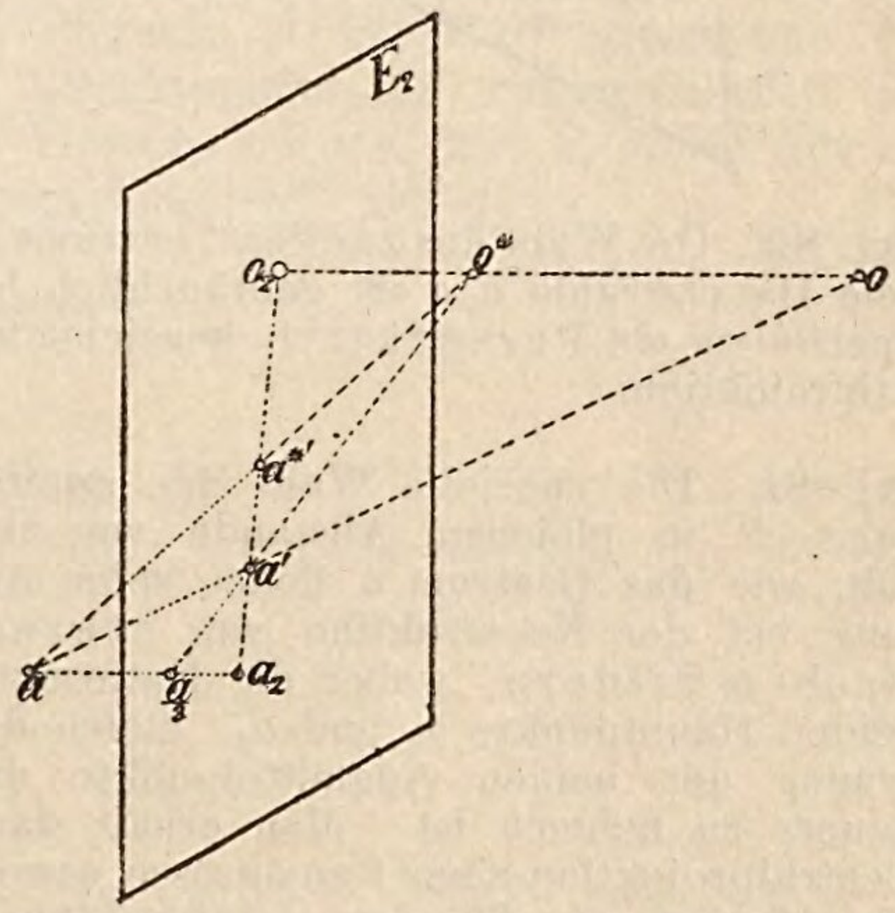
Erkl. 77. Die Entfernung des zweiten Centrums o^* von der **Pr. Eb.**, welche in der Regel ein bestimmter Bruchteil, etwa $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ etc. der Entfernung $\overline{o_2 o}$ ist, nennt man die reduzierte Distanz.

Erkl. 78. Bei der Wahl des zweiten Centrums o^* im Hauptstrahle $o_2 o$ gelangt man aber auch noch mittels einer anderen Verschiebung der darzustellenden Raumgrösse unter Zugrundelegung des **Pr. C.** o^* zur Centralprojektion einer Raumgrösse aus dem Centrum o.

Denkt man sich nämlich, siehe Figur 103, durch o^* eine Parallele zur Verbindungslinie $o\, a$ gezogen, so durchschneidet dieselbe die Linie $a_2 o_2$ in einem Punkt $a^{*\prime}$ und dieser Punkt ist die centrale Projektion eines Punktes a^* auf der rechtwinklig Projizierenden des Punktes a, welcher vom Punkte a gerade so weit entfernt ist, wie o von o^*, denn man erkennt ja unmittelbar die Gleichheit der Strecken $\overline{a\, a^*} = \overline{o^* o}$.

Aus der Figur 103 folgt nun weiter die Verhältnisgleichheit $\frac{\overline{o_2 o^*}}{\overline{o_2 o}} = \frac{\overline{o_2 a^{*\prime}}}{\overline{o_2 a'}}$, d. h. die Strecke $\overline{o_2 a^{*\prime}}$ ist der sovielste Teil der Strecke $\overline{o_2 a'}$, als die reduzierte Distanz Teil der wirklichen Distanz ist. Hätte man somit a'^* konstruiert, so findet man hieraus a' durch Abtragen der Strecken $\overline{o_2 a'} = n \cdot \overline{o_2 a^{*\prime}}$, wenn unter n der Wert des Verhältnisses $\frac{\overline{o_2 o}}{\overline{o_2 o^*}}$ verstanden ist.

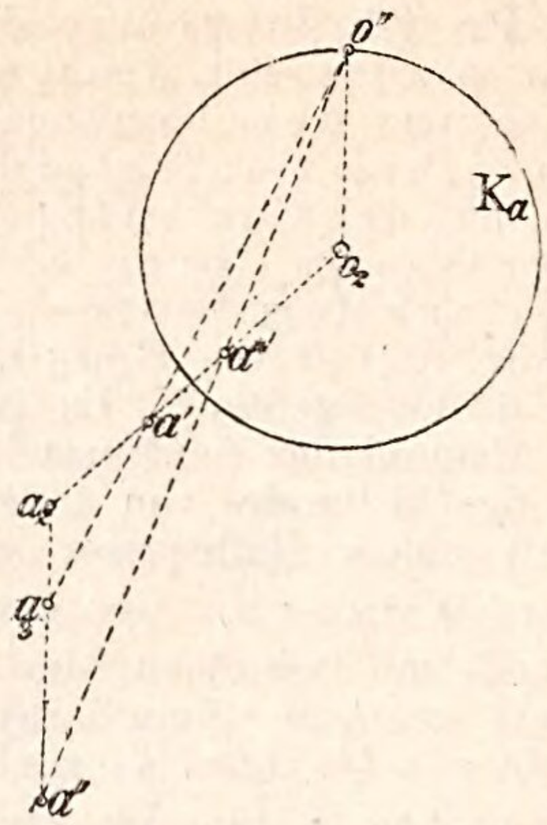
Figur 101.



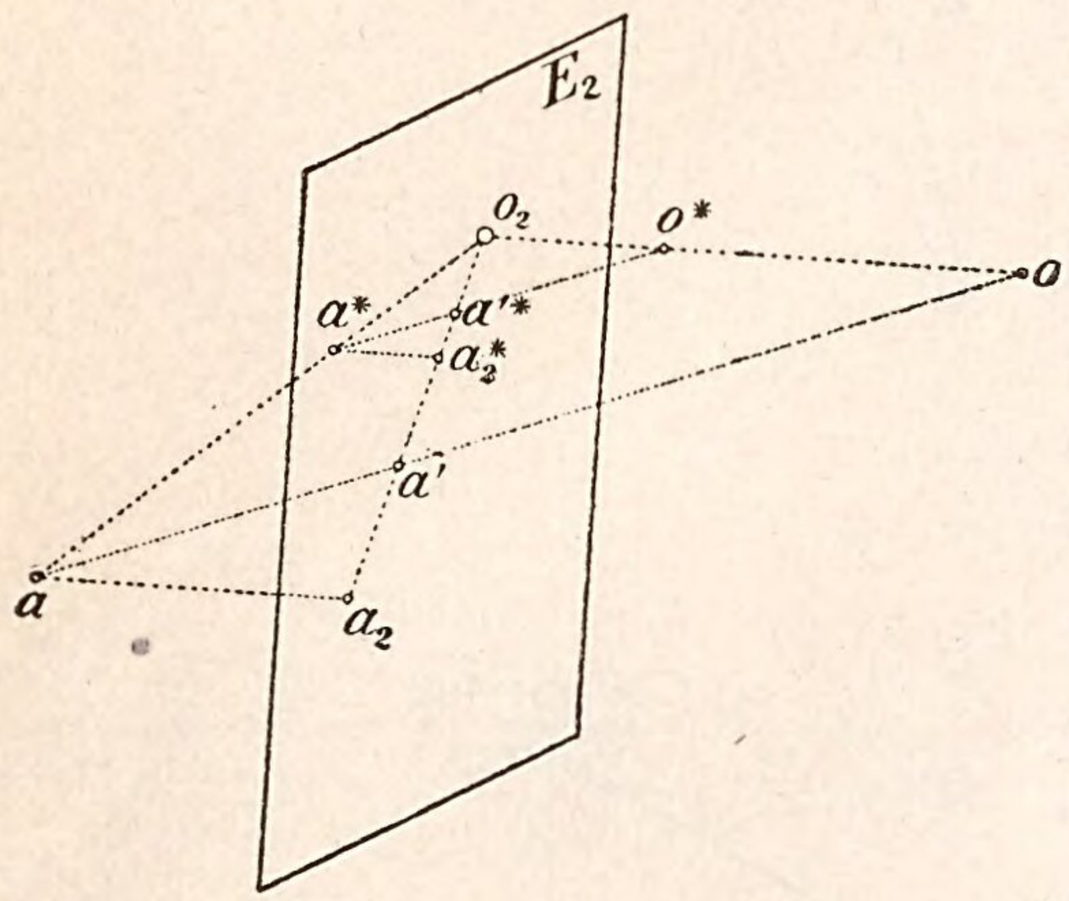
Bei der eben genannten Konstruktionsmethode denkt man sich also jeden Punkt der darzustellenden Raumgrösse in der nach dem Hauptpunkt gehenden Linie in demselben Verhältnis verschoben wie das **Pr. C.** im Hauptstrahle, projiziert die so verschobene Raumgrösse aus dem Centrum o^* und erhält hieraus die centrale Projektion für das Centrum o, durch Ziehen von Strahlen durch die Ecken der zuerst genannten Centralprojektion nach o_2 und Abtragen der Strecken $\overline{o_2 a'}$ . . gleich $n \,.\, \overline{o_2 a^{*\prime}}$.

Erkl. 79. Aus dem in Erkl. 78 gesagten folgt unmittelbar, dass die beiden Centralprojektionen für die Centra o und o^* ähnliche und ähnlich liegende Figuren, siehe Erkl. 267, I. Teil, für den Aehnlichkeitspunkt o_2 sein müssen. Kennt man somit eine von den beiden Figuren und von der anderen einen Punkt, so sind die übrigen Punkte leicht bestimmbar, zufolge des Parallelismus entsprechender Seiten beider Figuren.

Figur 102.



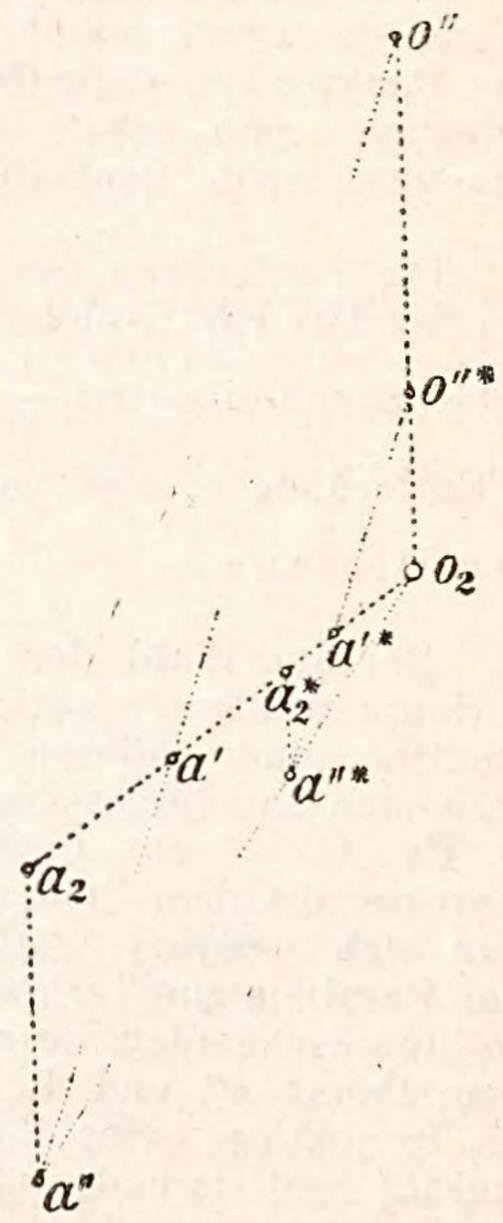
Figur 103.



Erkl. 80. Die Wahl des zweiten Centrums o^* auf dem Hauptstrahle $o_2 o$ ist gebräuchlich bei der speciellen als Perspektive bezeichneten Centralprojektion.

Erkl. 81. Die specielle Wahl des zweiten Centrums o^* in gleichem Abstande von der **Pr. Eb.** wie das Centrum o findet seine Anwendung bei der Konstruktion von stereoscopischen Bildern, wobei die Entfernung der beiden Hauptpunkte o_2 und o_2^* gleich der Entfernung der beiden Augmittelpunkte des Beschauers zu nehmen ist. Man erhält dann eine Centralprojektion einer Raumgrösse sowohl für das linke wie für das rechte Auge, welch beide Bilder mit beiden Augen in richtiger Entfernung und senkrecht über den beiden Augpunkten betrachtet in der sinnlichen Wahrnehmung sich zu einem einzigen Bilde der betreffenden Raumgrösse vereinigen.

Figur 104.

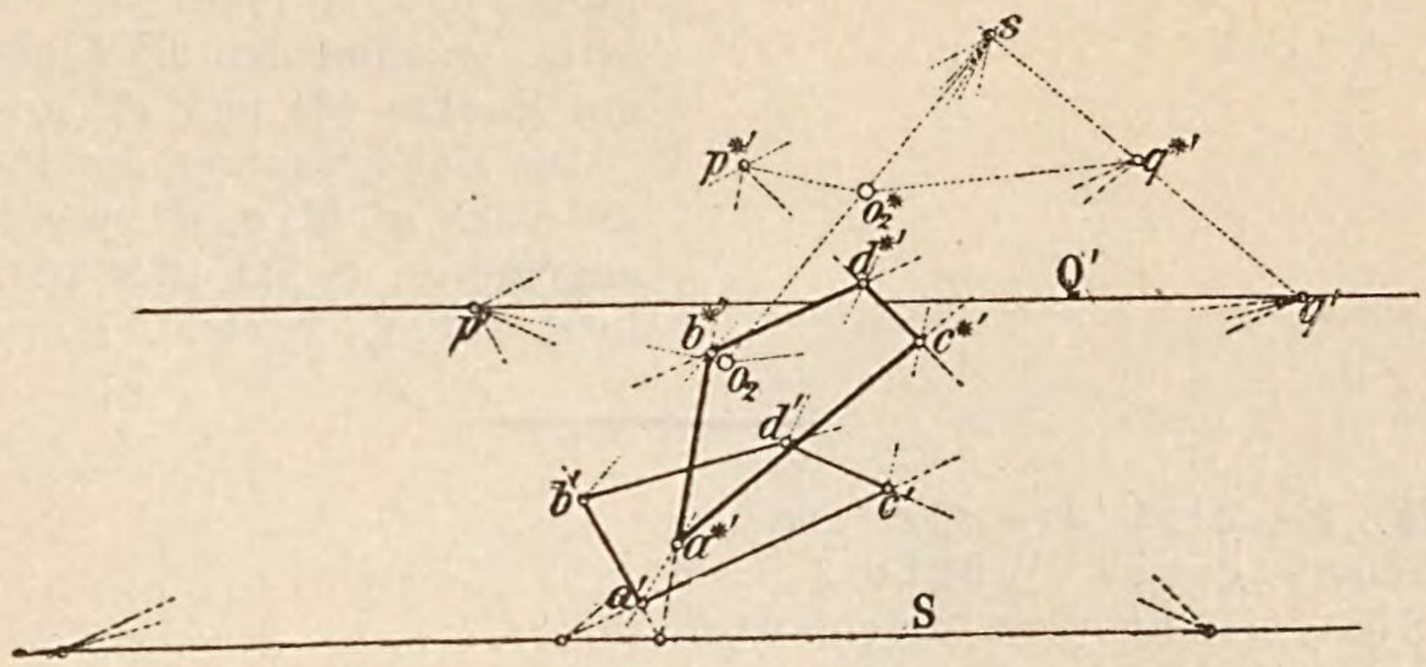


Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. In einer durch Spur und Fluchtgegebenen Ebene SQ', siehe Figur 105, ist ein Viereck $a'b'c'd'$ als Centralprojektion eines Parallelogramms gegeben. Man soll dessen centrale Projektion für ein Centrum o^*, dessen Hauptpunkt o^*_2 ist, konstruieren. Die Abstände beider Centra sollen bekannt sein.

Auflösung. Man bestimme den Punkt s als äusseren Teilungspunkt der Strecke $o_2 o^*_2$ im Verhältnis der gegebenen Abstände, so ergibt sich das Viereck $a^{*\prime} b^{*\prime} c^{*\prime} d^{*\prime}$ als centrisch-collineare Figur des Viereckes $a'b'c'd'$ mit s als Collineationscentrum und S als Achse. Man bestimmt sich zweckmässig die den Fluchtpunkten p' und q' centrisch-collinear entsprechenden Fluchtpunkte $p^{*\prime}$ und $q^{*\prime}$ durch Ziehen von Parallelen durch o^*_2 zu den Linien $o_2 p'$ und $o_2 q'$ bis zum Schnitt mit $p's$ und $q's$. Die Seiten des Vierecks $a^{*\prime} b^{*\prime} c^{*\prime} d^{*\prime}$ gehen nun durch die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten des Vierecks $a'b'c'd'$ mit S, sowie durch die Fluchtpunkte $p^{*\prime}$ und $q^{*\prime}$.

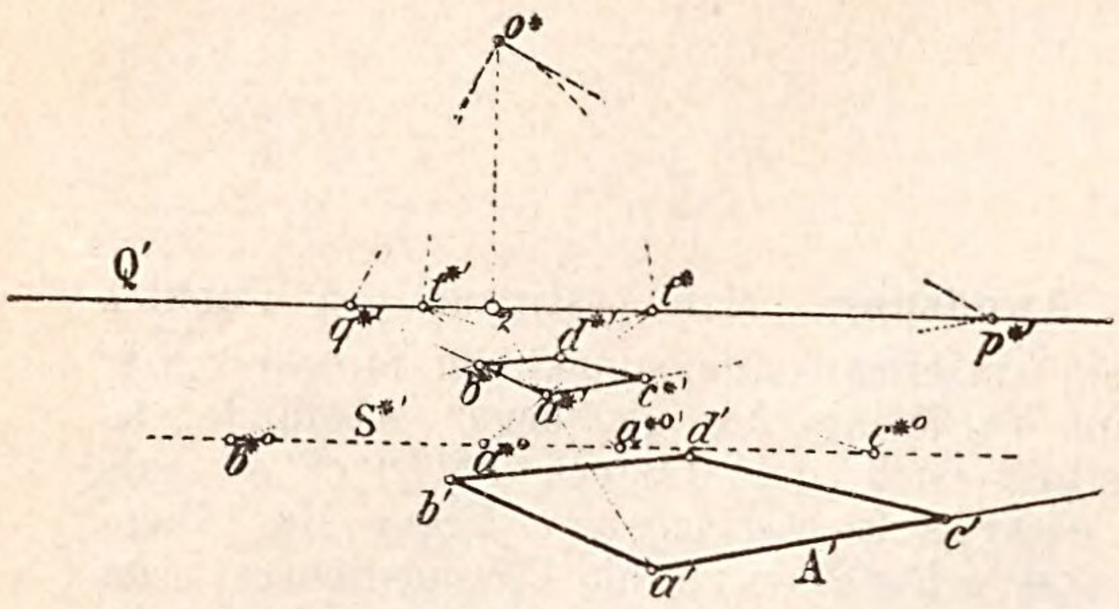
Figur 105.



Aufgabe 74. In einer durch Spur und Flucht gegebenen Ebene SQ', siehe Figur 106, liegt eine Linie A' als Centralprojektion der Seite eines Quadrates von bekannter Seitenlänge. Eine Ecke a' ist überdies gegeben. Man soll die centrale Projektion $a'b'c'd'$ des Quadrates zeichnen; wenn von den Fluchtpunkten aufeinanderfolgender Quadratseiten kein Gebrauch gemacht werden kann.

Auflösung. Es soll als reduzierte Distanz ein Drittel der wirklichen Distanz gewählt werden. In diesem Falle wird man in Rücksicht auf die Erkl. 74 und 75 die Verbindungslinie $o_2 a'$ in drei Teile teilen, den dem Augpunkte o_2 zunächst gelegenen Punkt

Figur 106.



als $a^{*'}$ wählen, und durch $a^{*'}$ die Parallele zu A' ziehen und so auf Q' den Fluchtpunkt $p^{*'}$ erhalten. Mittels $\overline{o_2 o^*}$ senkrecht zu Q' und der Senkrechten $o^* q^{*'}$ zu $p^{*'} o^*$ ergibt sich auf Q' ein zweiter Fluchtpunkt $q^{*'}$. Zieht man nun $a^{*'} q^{*'}$, so hat man nur nötig, auf den Linien $a^{*'} p^{*'}$ und $a^{*'} q^{*'}$ centralprojektivisch eine Länge gleich ein Drittel der gegebenen Quadratseiten aufzutragen, um die Punkte $c^{*'}$ und $b^{*'}$ zu erhalten, wodurch das Viereck $a^{*'} b^{*'} c^{*'} d^{*'}$ bestimmt ist.

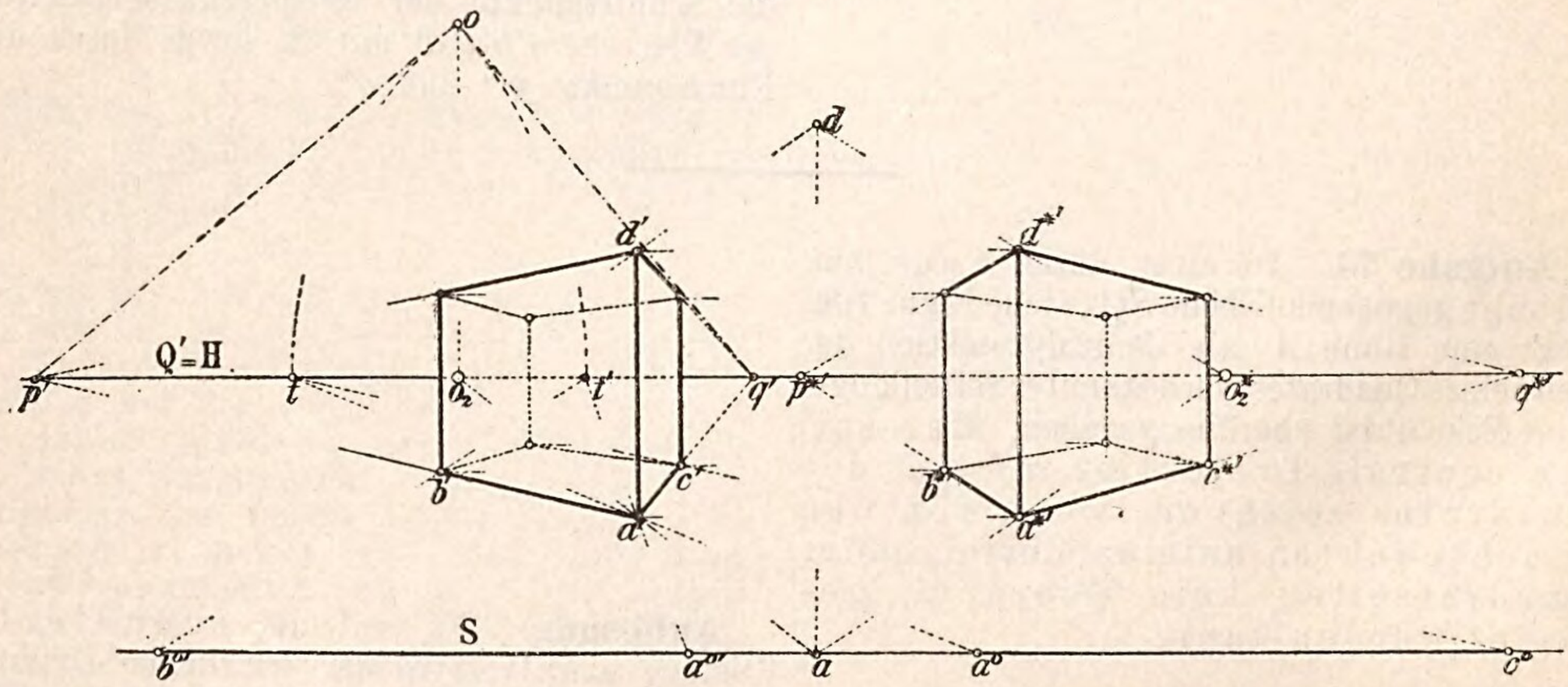
Zu genanntem Zwecke verschafft man sich die Teilungspunkte t^* und $t^{*'}$ mittels der Fluchtpunkte $q^{*'}$ und $p^{*'}$, sowie die der Geraden S entsprechenden Geraden $S^{*'}$, wobei der Abstand von $Q' S^{*'}$ gleich ein Drittel des Abstandes $S Q'$ sein muss, zieht $t^* a^{*'} a^{*0}$ ebenso $t^{*'} a^{*'} a^{*0'}$ und macht $\overline{a^{*0} b^{*0}} = \overline{a^{*0'} c^{*0}}$ gleich ein Drittel der gegebenen Quadratseite, so schneiden die Linien $b^{*0} t^*$ und $c^{*0} t^{*'}$ die Punkte $b^{*'}$ und $c^{*'}$ aus.

Die Uebertragung der Punkte $a^{*'}$, $b^{*'}$, $c^{*'}$, $d^{*'}$ nach a', b', c', d' geschieht wie in Erkl. 75 angegeben, es ist $a' b'$ parallel $a^{*'} b^{*'}$ und b' liegt auf $o_2 b^{*'}$ etc. . . .

Aufgabe 75. Es sind die stereoscopischen Bilder eines Würfels von bekannter Seitenlänge zu zeichnen, dessen Grundfläche in einer durch Spur und Flucht gegebenen Ebene SQ' liegt, siehe Figur 107, wenn eine Kante $a' b'$ in letzterer der Lage nach gegeben sein soll.

Auflösung. Sind o_2 und o^*_2 die beiden Hauptpunkte, so bestimme man zunächst den

Figur 107.



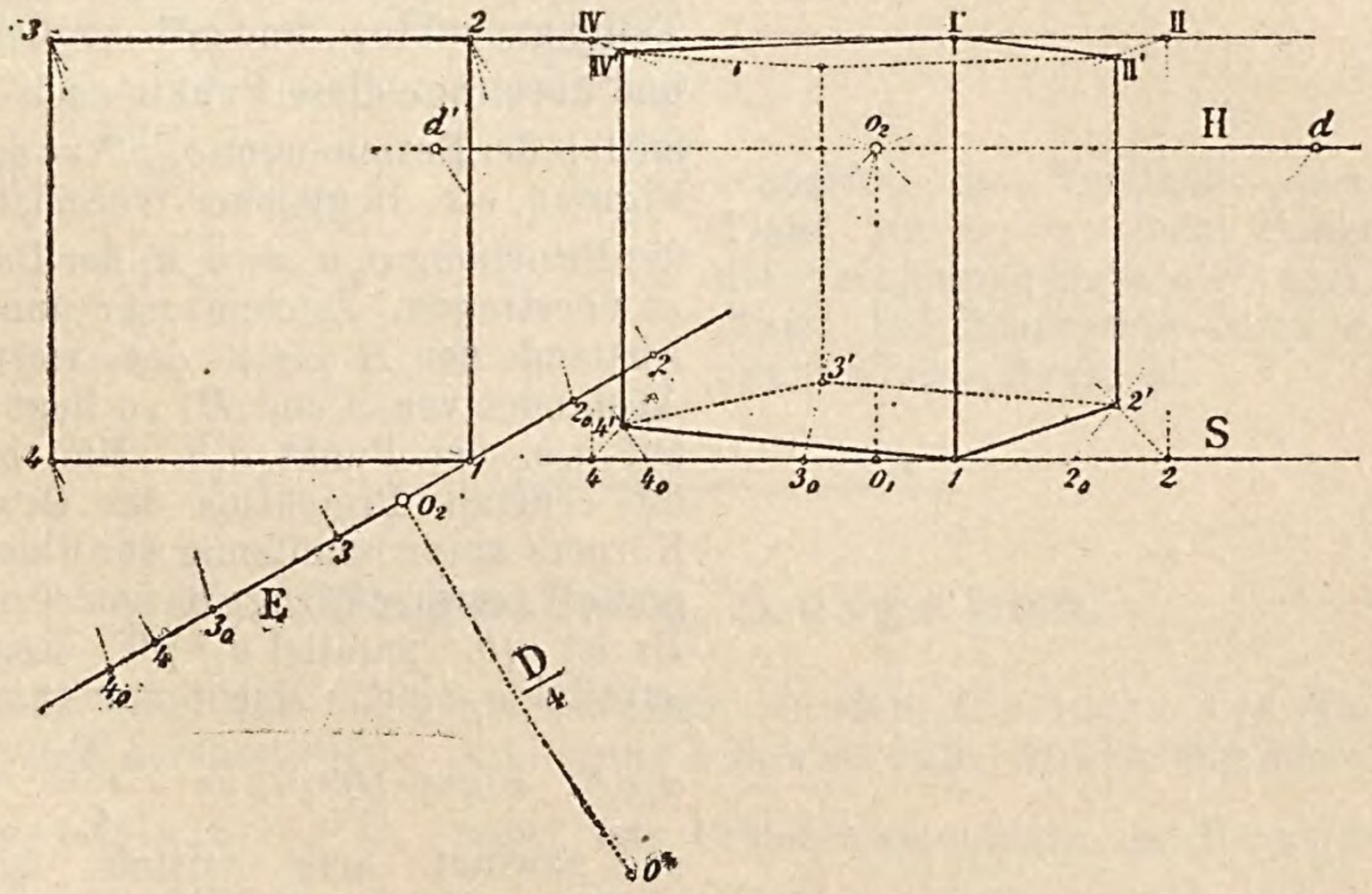
Fluchtpunkt p' und mittels des rechtw. Dreiecks $p' o' q'$, dessen zur Hypotenuse gehörige Höhe die Distanz ist auch den Flucht-

punkt q'. Uebertrage diese Fluchtpunkte nach $p^{*'}$ und $q^{*'}$, mittels der Beziehungen $\overline{o_2 p'} = \overline{o^*_2 p^{*'}}$, $\overline{o_2 q'} = \overline{o^*_2 q^{*'}}$. Zeichne hierauf die centrale Projektion des Würfels für das Centrum o und konstruiere hieraus zunächst die zur Grundfläche $a' b' c' \ldots$ affine Figur $a^{*'} b^{*'} c^{*'} \ldots$ mit S als Affinitätsachse und der Parallele hiezu als Affinitätsrichtung. Die durch die Ecken der Grundfläche zu letzterer senkrechten Würfelkanten sind in beiden Projektionen zu einander parallel und senkrecht zu Q' und ihre entsprechenden Eckpunkte befinden sich gleichfalls in Parallelen zu S bezw. Q'.

Aufgabe 76. Ein durch hinsichtlich seiner Ausmasse und seiner Lage gegen die **Pr. Eb.** E und gegen das **Pr. C.** gegebener Würfel, siehe Figur 108 a, soll in centraler Projektion dargestellt werden unter Anwendung einer reduzierten Distanz gleich $\frac{1}{4} D$ mit Zuhilfenahme des in Erkl. 72 beschriebenen Konstruktionsverfahrens.

Auflösung. Ist o_2 der Hauptpunkt, S die Spur und H die Flucht der Würfelbasis, so ziehe man durch o_2 eine Senkrechte zu S bezw. H, fälle von den Ecken des Würfels, siehe Figur 108a, Senkrechte zu E und

a. Figur 108. b.



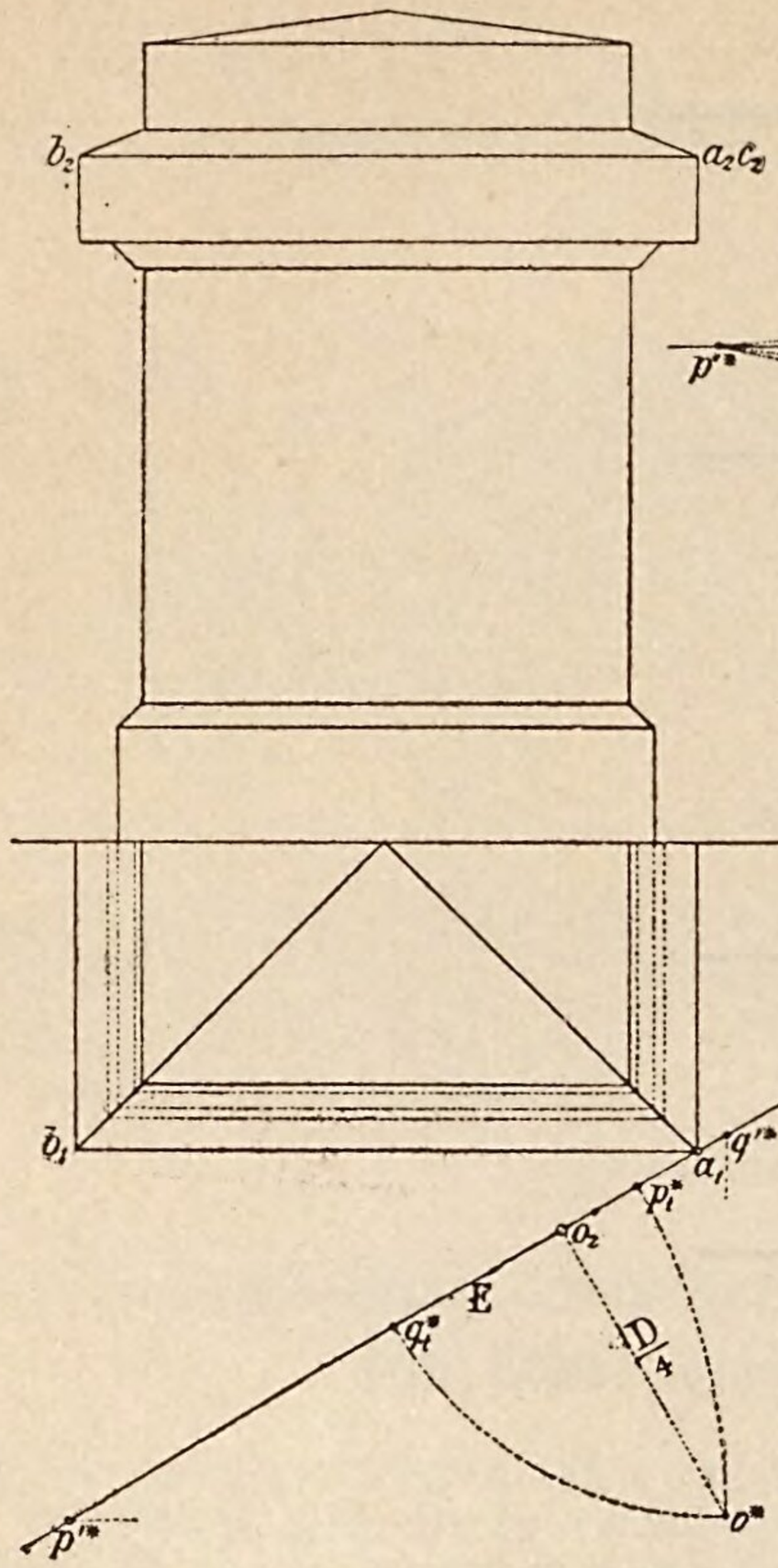
übertrage die Eckpunkte 1, 2, 3, 4 auf E, siehe Figur 108 a, nach 1, 2, 3, 4 auf S, siehe Figur 108 b, mittels der Beziehungen $\overline{o_2 1} = \overline{o_1 1}$, $\overline{o_2 2} = \overline{o_1 2}$, $\overline{o_2 3} = \overline{o_1 3}$, $\overline{o_2 4} = \overline{o_1 4}$. Die genannten Punkte 1, 2, 3, 4 auf S stellen die rechtw. Projektionen der Eckpunkte 1 bis 4 der Würfelgrundfläche auf die **Pr. Eb.** E_2 dar. Bestimmt man nun die vierten Teile der

Abstände der genannten Ecken von der **Pr. Eb.**, indem man etwa die Strecke $3\,3_0 = {}^1/_4\,\overline{3\,3}$ macht und durch die übrigen Eckpunkte 1 bis 4 Parallele zur Linie $3\,3_0$ zieht, so kann man durch Uebertragen der Strecken $\overline{2\,2_0}$, $\overline{3\,3_0}$, $\overline{4\,4_0}$ auf E nach $2\,2_0$, $3\,3_0$, $4\,4_0$ auf S und durch Ziehen von Linien durch die Punkte 2_0, 3_0, 4_0 nach den Distanzpunkten d bezw. d' auf dem durch die Punkte 2, 3 4 auf S nach o_2 gehenden Linien die centralen Projektionen 2', 3', 4' der Würfelecken erhalten. Die in der **Pr. Eb.** liegende Würfelkante $\overline{1\,1'}$ projiziert sich in wahrer Grösse; die Längen der übrigen zu 1 I' parallelen Kanten 2 II', 4 IV', 3 III' ergeben sich durch Benützung des Augpunktes o_2 und der Längen 2 II, 4 IV und 3 III.

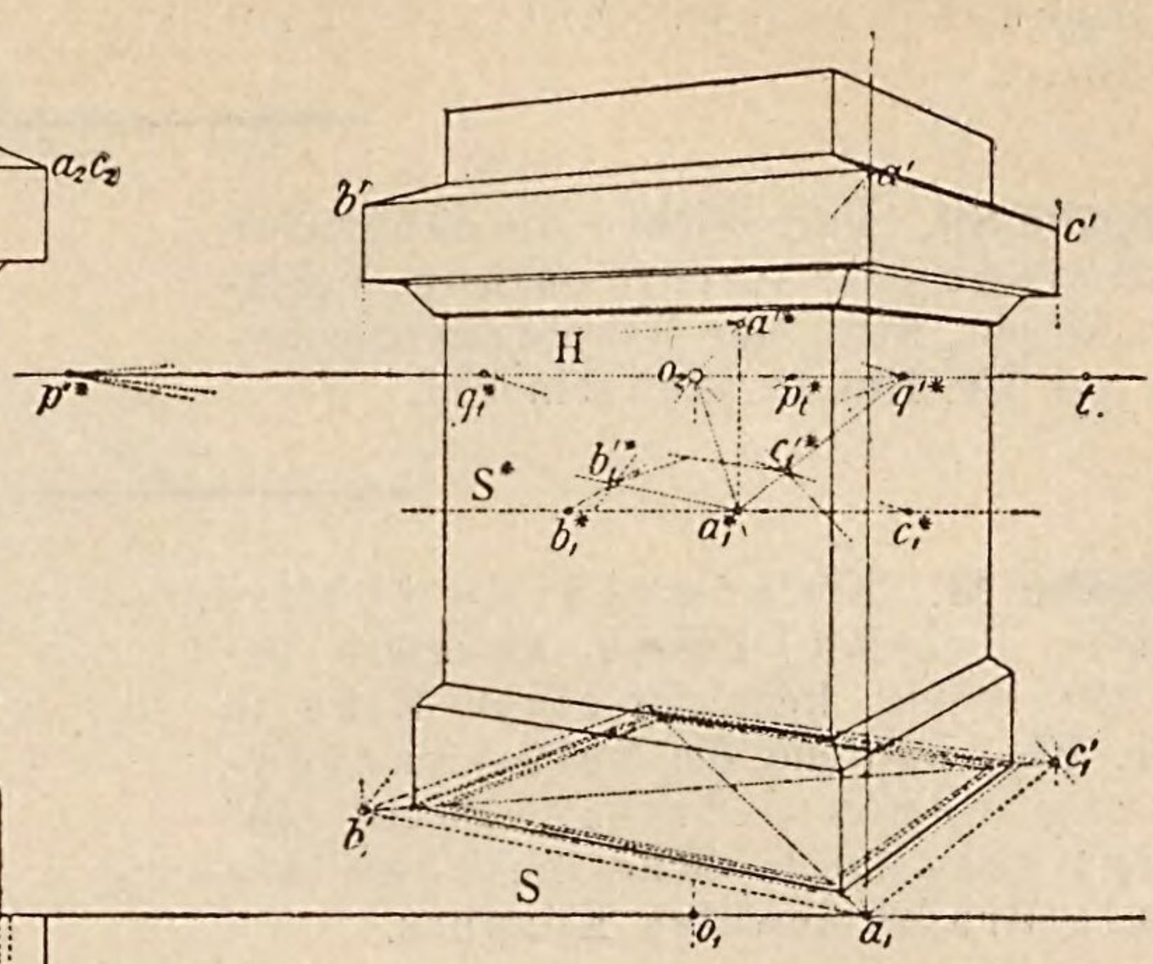
Aufgabe 77. Der in Figur 109 a durch seine rechtw. Projektionen auf die **Pr. Ebn.** E_1 und E_2 dargestellte und hinsichtlich seiner Lage gegen die Bildebene E gegebene Körper ist in centraler Projektion darzustellen unter Anwendung einer reduzierten Distanz gleich $\frac{1}{4}D$ mit Zuhilfenahme des in Erkl. 74 beschriebenen Konstruktionsverfahrens.

Auflösung. Man bestimme zunächst, siehe Figur 109 a, die Lage der Fluchtpunkte p'^* und q'^* der horizontalen Kantenrichtungen des Körpers, sowie die ihnen entsprechenden Teilungspunkte $p_t{}^*$ und $q_t{}^*$ bezüglich des **Pr.C.** o^* und übertrage diese Punkte nach Figur 109 b, mittels der Beziehungen $\overline{o_2\,p'^*} = \overline{o_2\,p'^*}$ in beiden Figuren, etc. In gleicher Weise ist auch mittels der Beziehung $\overline{o_2\,a_1} = \overline{o_1\,a_1}$ der Punkt a nach S zu übertragen. Zeichnet man nun S^* in einem Abstande von H gleich dem vierten Teile des Abstandes von S und H, so liegt hierauf und auf $a_1 o_2$ der Punkt $a_1{}^*$. Man bestimmt nun die centrale Projektion des Grundrisses des Körpers unter Benützung der Fluchtpunkte p'^* und q'^*, sowie der zugehörigen Teilungspunkte. Es ist $a_1 b_1{}'$ parallel $a_1{}^* p'^*$, desgleichen $a_1 c_1{}'$ parallel $a_1{}^* q'^*$. Macht man nun $a_1 b_1{}^*$ und $a_1 c_1{}^*$, Figur 109 b, $= \frac{a_1 b_1}{4}$, Figur 109 a, so gewinnt man mittels der Teilungspunkte $p_t{}^*$ und $q_t{}^*$ die Punkte $b_1{}'^*$ und $c_1{}'^*$, deren Verbindungslinien mit o_2 die Punkte $b_1{}'$ und $c_1{}'$ enthalten. Die Höhenlagen der einzelnen Eckpunkte des Körpers ergeben sich gleichfalls in einfacher Weise. Die Figur 109 b zeigt die Konstruktion der Linie $\overline{a'\,c'}$. Es ist $\overline{a_1\,a'}$ gleich der wahren Grösse des Abstandes des Punktes a, siehe Figur 109 a, von der **Pr. Eb.** E_1. Die Linie $a'\,o_2$

Figur 109 a.



Figur 109 b.



schneidet die Vertikale durch $a_1{}^*$, siehe Figur 109 b, in einem Punkt a'^* so, dass die Verbindungslinie $a'c'$ parallel zu $a'^* q'^*$ läuft. Die Senkrechte durch c_1' zu H liefert auf $a'c'$ den Punkt c'.

Ungelöste Aufgaben.

Anmerkung 12. Bei den folgenden Aufgaben ist stets die Lage des Hauptpunktes als gegeben vorausgesetzt. Die Lösung selbst ist unter Anwendung einer reduzierten Distanz gleich $\frac{1}{4} D$, wobei das Projektionscentrum im Hauptstrahle verschoben gedacht sein soll, durchzuführen.

Aufgabe 78. Man zeichne die regulären platonischen Körper in centraler Projektion, wenn eine Ecke derselben in der **Pr. Eb.**, eine Fläche in der Horizontalebene liegen soll.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Aufgabe 79. Man zeichne unter denselben Bedingungen wie in Aufgabe 77 die halbregulären Körper in centraler Projektion.

Aufgabe 80. Man zeichne die centralen Projektionen der sternförmigen, regulären Körper, wenn eine Hauptdiagonale derselben zur **Pr. Eb.** parallel sein soll.

Aufgabe 81. Ein reguläres sechsseitiges Prisma, dessen Ausmasse bekannt sein sollen, liegt mit einer Ecke in der **Pr. Eb.**, während die Seitenkantenrichtung gegen letztere unter 30° geneigt sein soll. Man zeichne die centrale Projektion des Körpers.

Aufgabe 82. Die Aufgabe 81 ist zu lösen für den Fall, dass statt eines Prismas ein senkrechter Kreiscylinder vorliegt.

Aufgabe 83. Eine durch Spur und Flucht gegebene Ebene ist Basisebene für einen senkrechten Kreiscylinder mit bekanntem Halbmesser und gegebener Höhe. Es soll die centrale Projektion des Cylinders gezeichnet werden.

Aufgabe 84. Die Aufgabe 83 ist zu lösen für den Fall, dass statt eines Cylinders ein senkrechter Kreiskegel dargestellt werden soll.

Aufgabe 85. Eine Ebene und ein Punkt sind gegeben; erstere durch Spur und Flucht, letzterer durch rechtw. und centrale Projektion. Der Punkt ist Ecke eines Würfels, dessen Gegenecke in der gegebenen Ebene so liegt, dass die sie verbindende Diagonale zur Ebene senkrecht steht. Es ist die centrale Projektion des Würfels zu zeichnen, wenn eine Kante desselben zur **Pr. Eb.** (Bildebene) parallel sein soll.

Aufgabe 86. Zwei Punkte *s* und *m* sind als Spitze und Mittelpunkt der Grundfläche einer regulären, achtseitigen Pyramide je durch rechtw. und centrale

Projektion gegeben. Es ist die centrale Projektion der Pyramide zu zeichnen, wenn die Länge einer Grundkante zur Länge einer Seitenkante sich wie 1 : 3 verhalten und eine der Seitenkanten zur **Pr. Eb.** parallel laufen soll.

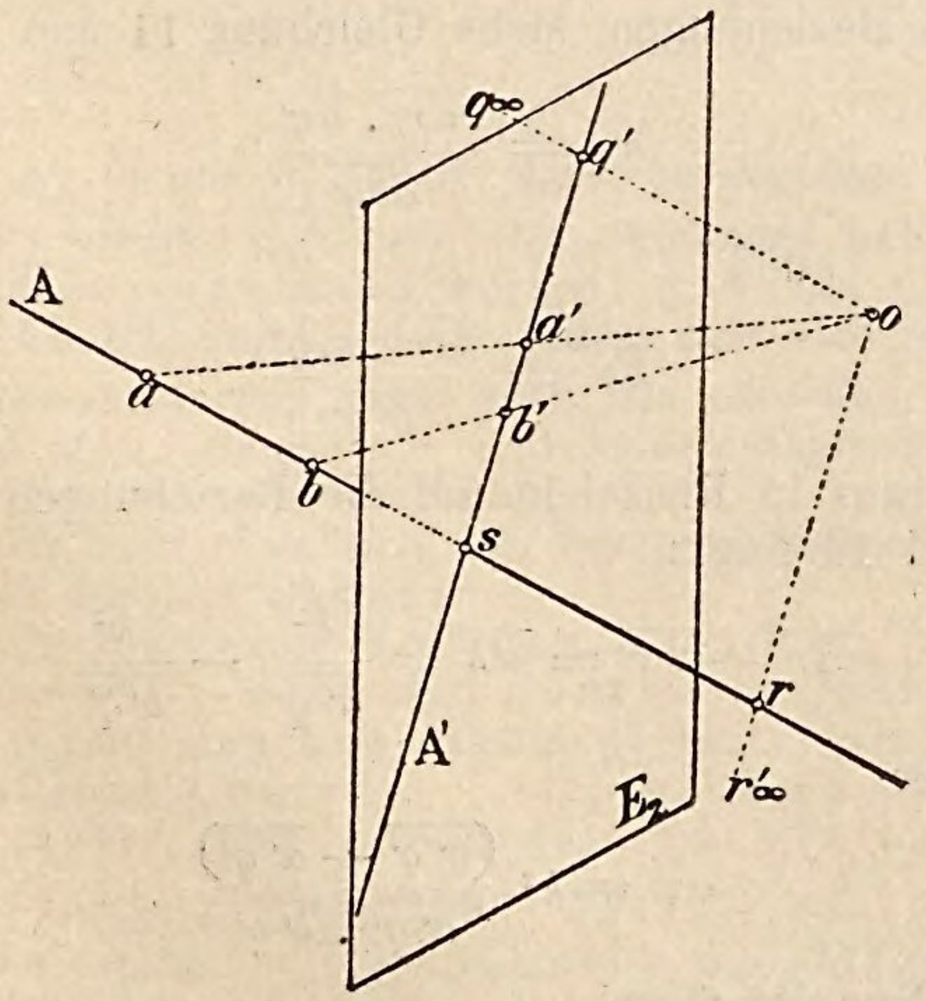
Aufgabe 87. Eine Gerade *A* ist durch Spur und Flucht, ein Punkt durch rechtw. und centrale Projektion gegeben. Es ist die centrale Projektion eines regelmässigen sechsseitigen Prismas darzustellen, welches den Punkt als Ecke, die Gerade als Achse hat und dessen Seitenkanten das Vierfache der Grundkanten betragen.

Aufgabe 88. Die Aufgaben 86 und 87 sind zu lösen für den Fall die darzustellenden Körper ein senkrechter Kreiskegel bezw. Kreiscylinder sein sollen.

F) Zusammenhang zwischen den Punkten einer Raumgrösse und deren centralen Projektionen.

Frage 52. Besteht zwischen den Punkten einer Geraden und deren centralen Projektionen ein bestimmter Zusammenhang und welcher?

Figur 110.



Antwort. Ist *A*, siehe Figur 110, eine Gerade im Raume, *A'* ihre centrale Projektion aus dem Centrum *o*, und *s* ihre Spur, so bestimme man mittels der Parallelstrahlen durch *o* zu *A* und *A'* die Gegenpunkte *r* und *q'* beider Geraden *A* und *A'*, siehe Erkl. 52, so lässt sich, wenn man auf *A* zwei Punkte *a* und *b* ganz willkürlich wählt und deren centrale Projektionen *a'* und *b'* ermittelt, aus der Figur die Aehnlichkeit der Dreiecke *o a r* und *a' o q'*, desgleichen *o b r* und *b' o q'* ersehen, woraus die nachstehenden Verhältnisgleichheiten hervorgehen.

Es ist:

$$\frac{\overline{ar}}{\overline{or}} = \frac{\overline{oq'}}{\overline{a'q'}} \quad \ldots \quad 9)$$

und

$$\frac{\overline{br}}{\overline{or}} = \frac{\overline{oq'}}{\overline{b'q'}} \quad \ldots \quad 10)$$

Aus Gleichung 9 folgt die weitere:

$$\overline{ar} = \frac{\overline{or} \cdot \overline{oq'}}{\overline{a'q'}} \quad \ldots \quad 11)$$

Erkl. 82. Der Wert eines Produktes $\overline{ar} \cdot \overline{a'q'}$ aus zweien Strecken $\overline{ar}$ und $\overline{a'q'}$ ist geometrisch stets durch den Flächeninhalt eines Rechteckes dargestellt, das die Strecken $\overline{ar}$ und $\overline{a'q'}$ als Seiten besitzt. Ein solches Rechteck kann aber hinsichtlich seines Flächeninhalts dem Flächeninhalte eines Quadrates gleich gesetzt werden, dessen Seite gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den Strecken $\overline{ar}$ und $\overline{a'q'}$ gleich ist.

(Siehe Kleyer's Lehrbuch der Planimetrie.)

desgleichen aus 10:

$$\overline{br} = \frac{\overline{or} \cdot \overline{oq'}}{\overline{b'q'}} \quad \ldots \quad 12)$$

Aus den Gleichungen 11 und 12 folgen endlich die Beziehungen:

$$\overline{ar} \cdot \overline{a'q'} = \overline{or} \cdot \overline{oq'} = \overline{br} \cdot \overline{b'q'} = \text{constant} \ldots 13)$$

Die Gleichung 13 enthält folgenden ausserordentlich wichtigen Satz:

„Zwischen den Punkten $a, b, c \ldots$. einer Geraden A und deren centralen Projektionen $a', b', c' \ldots$. auf einer Geraden A' findet stets die Beziehung statt, dass das Produkt der Abstände eines Paares entsprechender Punkte von den zugehörigen Gegenpunkten der Geraden A und A' eine constante Grösse hat."

Man nennt die ebengenannte constante Grösse die „projektivische Potenz" der beiden Geraden A und A' und bezeichnet sie in der Regel mit k^2, siehe Erkl. 82, so dass nunmehr Gleichung 13 in folgende übergeführt werden kann:

$$\overline{ar} \cdot \overline{a'q'} = \overline{br} \cdot \overline{b'q'} = \overline{cr} \cdot \overline{c'q'} \ldots = \text{constant}$$
$$= \overline{or} \cdot \overline{oq'} = k^2 \quad \ldots \quad 14)$$

Frage 53. In welchem Zusammenhange steht die Länge einer gegebenen Strecke $\overline{ab}$ zur Länge ihrer centralen Projektion $\overline{a'b'}$.

Antwort. Mit Bezugnahme auf die Antwort der Frage 52 erhält man für die Entfernungen der Endpunkte a und b der Strecke $\overline{ab}$ die Beziehungen, siehe Gleichung 11 und 12:

$$\overline{ar} = \frac{\overline{or} \cdot \overline{oq'}}{\overline{a'q'}}$$

und

$$\overline{br} = \frac{\overline{or} \cdot \overline{oq'}}{\overline{b'q'}}$$

woraus in Rücksicht auf die Beziehungen 13 und 14 folgt:

$$\overline{ar} - \overline{br} = \overline{ab} = \frac{k^2}{\overline{a'q'}} - \frac{k^2}{\overline{b'q'}}$$

oder

$$\overline{ab} = k^2 \frac{(\overline{b'q'} - \overline{a'q'})}{\overline{a'q'} \cdot \overline{b'q'}} \quad \ldots \quad 15)$$

Nun ist aber

$$\overline{b'q'} - \overline{a'q'} = \overline{a'b'},$$

folglich geht Gleichung 15 über in folgende:

$$\overline{ab} = \frac{k^2}{\overline{a'q'} \cdot \overline{b'q'}} \cdot \overline{a'b'} \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Frage 54. Kann es unter Umständen vorkommen, dass die centrale Projektion $\overline{a'b'}$ einer gegebenen Strecke $\overline{ab}$ der letzteren gleich werde und wann ist dieses der Fall?

Erkl. 83. Aus dem Inhalt der Antwort der Frage 54 folgt, dass es auf zweien Geraden A und A' zwei Systeme von entsprechend gleichen Strecken gibt; denn sind a und a' ein Paar entsprechender Punkte der Geraden A und A', siehe Figur 111, d. h. solche Punkte, deren Verbindungslinie durch o geht, so kann man die Strecke $\overline{ar}$ auch nach $\overline{a_0 r}$ abtragen, desgleichen auf A' nach beiden Seiten des Punktes q', d. h. nach $\overline{qb'}$ und $\overline{q'b'_0}$ und es ententsprechen die Punkte a, a_0, b', b'_0 den Punkten

Antwort. Sollen die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ einander gleich werden, ist mit Bezugnahme auf Gleichung 16 nur nötig, dass die Gleichheit sich erfülle

$$k^2 = \overline{a'q'} \cdot \overline{b'q'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

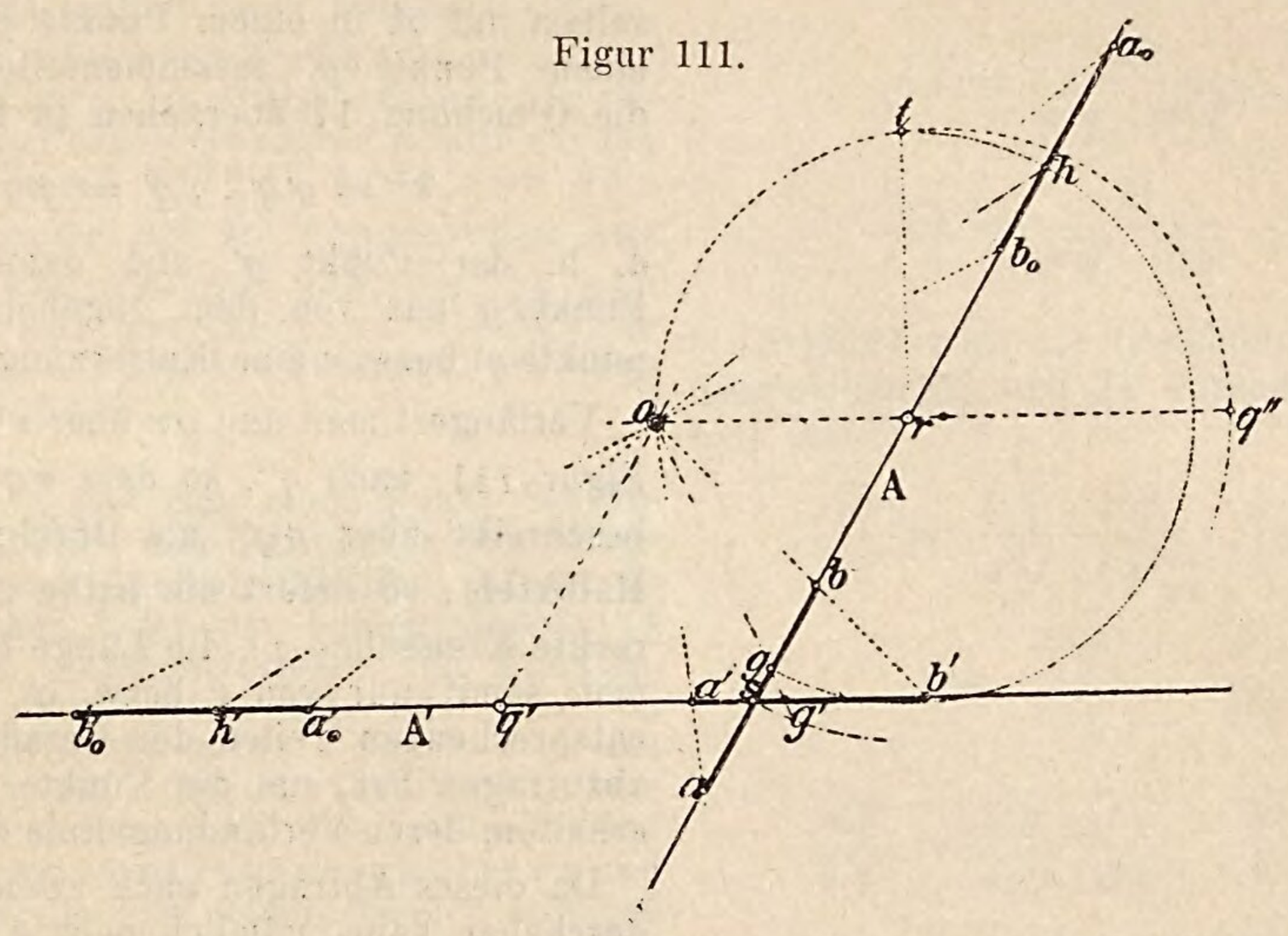
oder anders ausgedrückt, dass

$$\overline{or} \cdot \overline{oq'} = \overline{a'q'} \cdot \overline{b'q'} \text{ sei.}$$

Nun ist aber

$$\overline{or} \cdot \overline{oq'} = \overline{ar} \cdot \overline{a'q'},$$

Figur 111.



a', a'_0, b und b_0 derart, dass die Strecken $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, ebenso $\overline{a_0 b_0}$ und $\overline{a'_0 b'_0}$ einander gleich und entsprechend werden, d. h. die eine die Centralprojektion der andern sein wird; desgleichen werden aber auch die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'_0}$, ebenso $\overline{a_0 b}$ und $\overline{a_0 b'}$ entsprechend gleiche Strecken darstellen.

Als Satz lässt sich das Vorangegangene wie folgt zusammenfassen:

„Auf zweien Geraden A und A', von denen die eine die Centralprojektion der anderen aus einem willkürlich gewählten Centrum o ist, gibt es zwei Systeme von entsprechend gleichen Strecken; das eine System $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, bezw. $\overline{a_0 b_0}$, $\overline{a'_0 b'_0}$ schliesst die Gegenpunkte r und q' aus, das andere System $\overline{ab_0}$, $\overline{a_0 b}$, $\overline{a'b'_0}$, $\overline{a'_0 b'}$ schliesst sie ein."

siehe Gleichung 13, folglich auch in Rücksicht auf Gleichung 17

$$\overline{a'q'} \cdot \overline{b'q'} = \overline{ar} \cdot \overline{a'q'},$$

oder

$$\overline{b'q'} = \overline{ar} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

In gleicher Weise erhält man auch die Beziehung:

$$\overline{br} = \overline{a'q'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Das eben Entwickelte kann als Satz wie folgt ausgesprochen werden:

„Damit die Centralprojektion $\overline{a'b'}$ einer gegebenen Strecke $\overline{ab}$ gleich der Strecke selbst werde, ist es not-

Erkl. 84. Trägt man auf einer der beiden Geraden A und A', siehe Figur 111, etwa auf A die Strecke $\overline{rg}$ ab, desgleichen auf A' von q' die gleich grosse Strecke $\overline{q'g'}$ ab, so wird im allgemeinen die Verbindungslinie gg' nicht durch o gehen, siehe Erkl. 83, es gibt jedoch auf der Geraden A eine ganz bestimmte Lage von g, derart, dass wenn man go zieht, diese Verbindungslinie die A' in einem Punkte g' so schneidet, dass $\overline{rg} = \overline{q'g'}$ ist. Es stellen dann die Punkte g und g' gewissermassen zwei entsprechend gleiche Strecken von der Grösse Null dar, welche die entsprechenden Nullstrecken heissen.

Frage 55. Wie konstruiert man die in Erkl. 83 gekennzeichneten entsprechenden Nullstrecken zweier Geraden A und A' für ein Centrum o?

Antwort. Soll eine Strecke $\overline{ab}$ und deren entsprechend gleiche $\overline{a'b'}$ je von der Grösse Null sein, d. h. sollen die Endpunkte derselben auf A in einem Punkte g, auf A' in einem Punkte g' zusammenfallen, so muss die Gleichung 17 übergehen in folgende:

$$k^2 = \overline{g'q'} \cdot \overline{g'q'} = \overline{g'q^2} \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

d. h. der Punkt g' und damit auch der Punkt g hat von dem zugehörigen Gegenpunkte q' bezw. r eine Entfernung gleich $\sqrt{k^2}$.

Verlängert man nun or über r hinaus, siehe Figur 111, nach q'', so dass $\overline{rq''} = \overline{oq'}$ ist, beschreibt über $\overline{oq''}$ als Durchmesser einen Halbkreis, so liefert die halbe zu $\overline{rq''}$ senkrechte Kreissehne $\overline{rt}$ die Länge $\sqrt{k^2}$, welche man somit nur von r bezw. q' aus auf den entsprechenden Teilen der Geraden A und A' abzutragen hat, um die Punkte g und g' zu erhalten, deren Verbindungslinie durch o geht.

Da dieses Abtragen nach zweien Seiten hin geschehen kann, nämlich nach g und g' bezw. h und h', so gibt es auf den Geraden A und A' zwei Paare entsprechender Nullstrecken.

Das eben Gesagte lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Auf zweien Geraden A und A', von denen die eine die Centralprojektion der anderen aus einem Centrum o ist, gibt es zwei Paare entsprechender Nullstrecken, welche von den bezüglichen Gegenpunkten der Geraden in einem Abstande gleich der Quadratwurzel aus der projektivischen Potenz sich befinden; das eine Paar entsprechender Nullstrecken schliesst die Gegenpunkte ein, das andere schliesst sie aus.“

---

wendig und hinreichend, dass die Entfernungen der nicht entsprechenden Endpunkte a und b' oder a' und b von den zugehörigen Gegenpunkten r und q' oder q' und r gleichen Abstand besitzen.“

Frage 56. Auf zweien Geraden A und A', von denen die eine die Centralprojektion der anderen aus einem Centrum o ist, seien mehrere Paare entsprechender Punkte, wie z. B. a und a', b und b', c und c', d und d' . . . . gegeben, besteht zwischen den Punkten der einen Geraden und jenen der anderen eine bestimmte Beziehung und welche?

Antwort. Durch die Punkte auf A und A' sind gewisse Strecken $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ad}$, $\overline{bd}$ . . . . $\overline{a'c'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{a'd'}$, $\overline{b'd'}$ etc. begrenzt, zwischen welchen der in Antwort der Frage **53** geschilderte und durch Gleichung **16** ausgedrückte Zusammenhang besteht; man kann demnach folgende Gleichheiten als richtig anschreiben:

$$\overline{ac} = \frac{k^2}{\overline{a'q'} \cdot \overline{c'q'}} \cdot \overline{a'c'} \quad \ldots \quad 21)$$

$$\overline{bc} = \frac{k^2}{\overline{b'q'} \cdot \overline{c'q'}} \cdot \overline{b'c'} \quad \ldots \quad 22)$$

$$\overline{ad} = \frac{k^2}{\overline{a'q'} \cdot \overline{d'q'}} \cdot \overline{a'd'} \quad \ldots \quad 23)$$

$$\overline{bd} = \frac{k^2}{\overline{b'q'} \cdot \overline{d'q'}} \cdot \overline{b'd'} \quad \ldots \quad 24)$$

Dividiert man die Gleichungen **21** und **22**, desgleichen **23** und **24** durcheinander, so erhält man:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{b'q'} \cdot \overline{c'q'}}{\overline{a'q'} \cdot \overline{c'q'}} \cdot \frac{k^2}{k^2} \cdot \frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}}$$

$$= \frac{\overline{b'q'}}{\overline{a'q'}} \cdot \frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}} \quad \ldots \quad 25)$$

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{b'q'} \cdot \overline{d'q'}}{\overline{a'q'} \cdot \overline{d'q'}} \cdot \frac{k^2}{k^2} \cdot \frac{\overline{a'd'}}{\overline{b'd'}}$$

$$= \frac{\overline{b'q'}}{\overline{a'q'}} \cdot \frac{\overline{a'd'}}{\overline{b'd'}} \quad \ldots \quad 26)$$

Durch Division der Gleichungen **25** und **26** ergibt sich endlich:

$$\frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}}} = \frac{\frac{\overline{b'q'}}{\overline{a'q'}} \cdot \frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}}}{\frac{\overline{b'q'}}{\overline{a'q'}} \cdot \frac{\overline{a'd'}}{\overline{b'd'}}} = \frac{\frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}}}{\frac{\overline{a'd'}}{\overline{b'd'}}} \quad \ldots \quad 27)$$

Erkl. 85. Die beiden Seiten der Gleichung 27 stellen je ein Verhältnis zwischen zweien Verhältnissen, gebildet aus den von den Punkten a, b, c, d, a', b', c' und d' gebildeten Strecken dar, welches man ein Doppelverhältnis dieser Strecken nennt, und zwar bezeichnet man die linke Seite der Gleichung 27 als das Doppelverhältnis der vier Punkte a, b, c, d, die rechte Seite als das Doppelverhältnis der vier Punkte a', b', c', d'.

Gleichung 27 enthält somit folgenden Satz:

„Sind a, b, c, d vier Punkte auf einer Geraden A, a', b', c', d' ihre Centralprojektionen auf einer Geraden A' aus einem Centrum o und bildet man aus den Strecken $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ad}$, $\overline{bd}$, desgleichen aus den Strecken $\overline{a'c'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{a'd'}$, $\overline{b'd'}$ je ein Doppelverhältnis, so sind die Werte der beiden Doppelverhältnisse einander gleich."

Erkl. 86. Lässt man einen Punkt die Gerade A durchlaufen und bestimmt in jeder Lage seine zugehörige Centralprojektion auf A', so erhält man auf jeder der beiden Geraden A und A' eine Aufeinanderfolge von Punkten, welche man eine Punktreihe oder auch ein gerades Gebilde nennt. Nimmt man aus der Punktreihe auf A irgend vier Punkte heraus, ermittelt deren entsprechenden Punkte auf A', d. h. deren Centralprojektionen und bildet nun mit den vier entsprechenden Strecken der betreffenden Punkte je ein Doppelverhältnis, so sind die einander entsprechenden Doppelverhältnisse auf A und A' einander gleich. Das eben Gesagte lässt sich als Satz so ausdrücken:

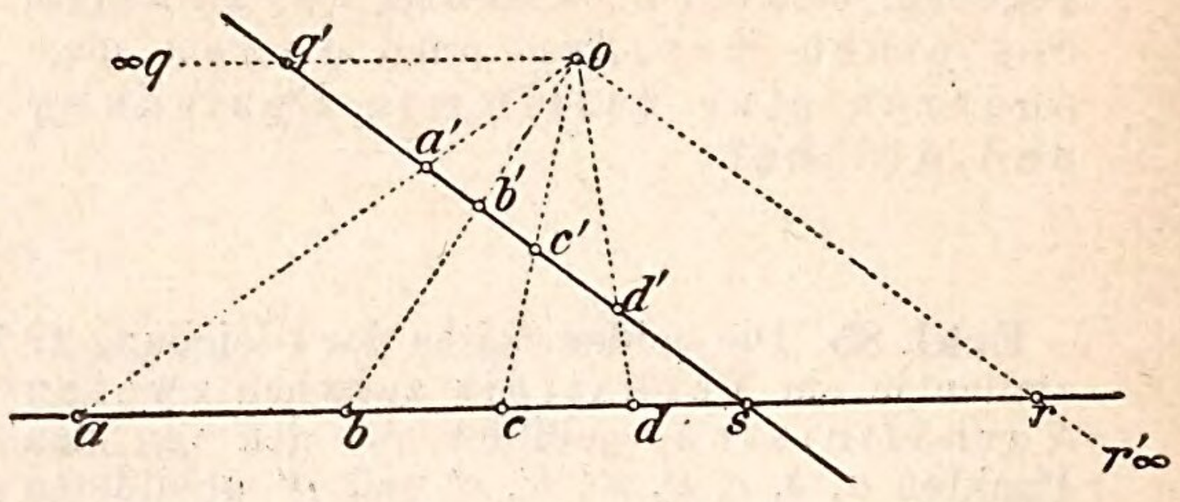
„Das Doppelverhältnis zwischen den von irgendwelchen vier Punkten einer Geraden A gebildeten Strecken ist dem Doppelverhältnis des von den durch die Centralprojektion der genannten vier Punkte auf einer Geraden A' gebildeten Strecken immer gleich."

Erkl. 87. Die Gerade, auf welcher eine Punktreihe liegt, heisst der Träger der Punktreihe.

Erkl. 88. Zwei Punktreihen, welche auf die in Erkl. 86 genannte Weise mit einander verbunden sind, nennt man projektive Punkt-

reihen und man sagt speciell, die projektiven Punktreihen liegen perspektivisch, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen. Die Punkte zweier Geraden A und A', siehe Figur 112, von denen eine die Centralprojektion der anderen ist, bilden stets zwei perspektivisch liegende projektive Punktreihen. Lässt man das Doppelverhältnis zwischen den Strecken der Punkte a, b, c, d auf einer Geraden A und den entsprechenden Centralprojektionen auf A' ungeändert, bewegt aber die eine der beiden Geraden oder aber beide beliebig in ihrer Ebene oder ganz beliebig im Raume, so bleiben die Geraden stets projektiv, weil das Gesetz der Projektivität lediglich durch die Gleichheit der oben genannten Doppelverhältnisse ausgedrückt ist.

Figur 112.



Erkl. 89. Ein Doppelverhältnis zwischen den Strecken von vier Punkten, z. B. a, b, c, d von der Form

$$\frac{\frac{a\,c}{b\,d}}{\frac{b\,c}{b\,d}}$$

wird abgekürzt kurz so angeschrieben (ab, cd). Man nimmt dabei zur Bildung des Doppelverhältnisses den ersten Punkt a, verbindet ihn mit den Punkten c und d zu Strecken und bildet deren Verhältnis, hierauf verbindet man den zweiten Punkt b mit den Punkten c und d zu Strecken und bildet auch mit diesen ein Verhältnis. Das Verhältnis zwischen den beiden genannten Verhältnissen bildet dann das Doppelverhältnis der vier Punkte.

Erkl. 90. Bei einem in der Form (ab, cd) geschriebenen Doppelverhältnis von vier Punkten, bezeichnet man die Punkte in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge: Punkt a heisst somit erster, Punkt b zweiter, Punkt c dritter, endlich Punkt d vierter Punkt.

Die Punkte b und c heissen auch wohl innere, die Punkte a und d aber äussere Punkte.

Die Punkte a und b, ebenso b und c, bezeichnet man endlich als zusammengehörige oder conjugierte Punktpaare und nennt wohl ab das erste, cd das zweite conjugierte Punktpaar.

Frage 57. Lassen sich die durch vier Punkte einer Geraden gebildeten Strecken in mehrfacher Weise zu Doppelverhältnissen vereinigen?

Antwort. Vier Punkte a, b, c, d lassen sich im ganzen auf 24 verschiedene Arten neben einander stellen, siehe Kleyer's Lehrbuch der Combinationslehre, nämlich:

I.	II.	III.	IV.	
1) $ab,\ cd$	7) $ba,\ cd$	13) $ca,\ bd$	19) $da,\ bc$	
2) $ab,\ dc$	8) $ba,\ dc$	14) $ca,\ db$	20) $da,\ cb$	
3) $ac,\ bd$	9) $bc,\ ad$	15) $cb,\ ad$	21) $db,\ ac$	. . . . 28)
4) $ac,\ db$	10) $bc,\ da$	16) $cb,\ da$	22) $db,\ ca$	
5) $ad,\ bc$	11) $bd,\ ac$	17) $cd,\ ab$	23) $dc,\ ab$	
6) $ad,\ cb$	12) $bd,\ ca$	18) $cd,\ ba$	24) $dc,\ ba$	

Es sind somit aus den von vier Punkten einer Geraden gebildeten Strecken vierundzwanzig Doppelverhältnisse möglich.

Frage 58. Stehen die in Antwort der Frage 57 genannten 24 Doppelverhältnisse in einem gewissen Zusammenhange miteinander und in welchem?

Erkl. 91. Sind a, b, c drei beliebige Punkte einer Geraden A, so findet zwischen den Strecken $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ und $\overline{ca}$ stets die Beziehung statt:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = o \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

Ist nun d ein weiterer Punkt der Geraden und multipliziert man die Gleichung 29 mit $\overline{ad}$, unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \overline{ad} &= \overline{ab} + \overline{bd} \\ \text{und } ad &= ac + cd \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

so erhält man:

$$\overline{ab} \,.\, \overline{ad} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad} + \overline{ca} \,.\, \overline{ad} = o$$

oder

$$\overline{ab} \,.\, (\overline{ac} + \overline{cd}) + \overline{bc} \,.\, \overline{ad} + \overline{ca} \,.\, (\overline{ab} + \overline{bd}) = o$$

oder

$$\overline{ab} \,.\, \overline{ac} + \overline{ab} \,.\, \overline{cd} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad} + \overline{ca} \,.\, \overline{ab} + \overline{ca} \,.\, \overline{bd} = o$$

$$\overline{ab} \,.\, (\overline{ac} + \overline{ca}) + \overline{ab} \,.\, \overline{cd} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad} + \overline{ca} \,.\, \overline{bd} = o$$

oder

$$\overline{ab} \,.\, \overline{cd} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad} + \overline{ca} \,.\, \overline{bd} = o \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

Antwort. Bezeichnet man den Wert des Doppelverhältnisses $(ab,\ cd)$ oder 1 mit m, so entsteht das Doppelverhältnis $(ab,\ dc)$ oder 2 aus dem ersten durch Vertauschung der Punkte des zweiten Punktpaares; schreibt man die Doppelverhältnisse 1 und 2 wirklich an, so erhält man

$$(ab,\ cd) = \frac{\dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\dfrac{\overline{ad}}{\overline{bd}}} = m \text{ und } (ab,\ dc) = \frac{\dfrac{\overline{ad}}{\overline{ac}}}{\dfrac{\overline{bd}}{\overline{bc}}}$$

letzterer Wert ist offenbar der reciproke des Wertes des ersten Doppelverhältnisses, also gleich $\frac{1}{m}$. Aus dem eben Entwickelten folgt aber der Satz:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse die Punkte eines zusammengehörigen Punktpaares und bildet mit den so erhaltenen Punkten ein neues Doppelverhältnis, so ist der Wert des letzteren gleich dem reciproken Werte des gegebenen Doppelverhältnisses."

Dividiert man Gleichung 31, siehe Erkl. 91, durch $\overline{ad} \,.\, \overline{bc}$, so geht sie über in folgende:

$$\frac{\overline{ab} \,.\, \overline{cd}}{\overline{ad} \,.\, \overline{bc}} + \frac{\overline{bc} \,.\, \overline{ad}}{\overline{ad} \,.\, \overline{bc}} + \frac{\overline{ca} \,.\, \overline{bd}}{\overline{ad} \,.\, \overline{bc}} = o$$

oder

$$\frac{\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}}{\dfrac{\overline{ad}}{\overline{cd}}} + \frac{\dfrac{\overline{ca}}{\overline{ad}}}{\dfrac{\overline{bc}}{\overline{bd}}} = -1,$$

welche Gleichung offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{\frac{\overline{ab}}{\overline{cb}}}{\frac{\overline{ad}}{\overline{cd}}} + \frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{ad}}}{\frac{\overline{bc}}{\overline{bd}}} = 1,$$

oder

$$(ac,\ bd) + (ab,\ cd) = 1 \quad . \ . \ . \quad 32)$$

Aus Gleichung 32 folgt aber mit Rücksicht auf den Wert des Doppelverhältnisses $(ab,\ cd)$ der Wert des Doppelverhältnisses

$$(ac,\ bd) = 1 - (ab,\ cd)$$

$$= 1 - m \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 33$$

Aus dem eben Entwickelten ergibt sich folgender Satz:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse $(ab,\ cd)$ die beiden inneren Punkte miteinander und bildet mit den so erhaltenen Punkten ein neues Doppelverhältnis, so ist der Wert dieses Doppelverhältnisses $(ac,\ bd)$ gleich der Einheit weniger dem Werte des ursprünglichen Doppelverhältnisses."

Mit Rücksicht auf den Zusammenhang zwischen den Werten der Doppelverhältnisse 1 und 2 folgt nun, da das Doppelverhältnis 4 aus 3 sich in gleicher Weise ableitet wie 2 aus 1, für 3 der Wert:

$$(ac,\ bd) = \frac{1}{1-m} \quad . \ . \ . \quad 34)$$

Es gilt somit folgender Satz:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnis $(ab,\ cd)$ von dem Werte m zunächst die beiden inneren Punkte, hierauf die Punkte des zweiten Punktpaares und bildet mit den so erhaltenen Punkten ein neues Doppelverhältnis $(ac,\ bd)$, so ist der Wert desselben gleich $\frac{1}{1-m}$."

Aus dem eben Gesagten ergibt sich aber unmittelbar für den Wert des Doppelverhältnisses 5 die Beziehung:

$$(ad,\ bc) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-m}} = \frac{1}{\frac{1-m-1}{1-m}} =$$

$$\frac{1-m}{-m} = \frac{m-1}{m} \quad . \ . \ . \quad 35)$$

welche Gleichung den weiteren Satz enthält:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse (ab, cd) von dem Werte m zunächst die Punkte des zweiten Punktpaares, hierauf die beiden inneren Punkte miteinander und bildet mit den so erhaltenen Punkten ein neues Doppelverhältnis (ad, bc), so ist der Wert desselben gleich $\frac{m-1}{1}$."

Da endlich das Doppelverhältnis 6 aus 5 ebenso entsteht, wie 2 aus 1, so folgt die weitere Beziehung:

$$(ad, cb) = \frac{1}{\frac{m-1}{m}} = \frac{m}{m-1} \quad \ldots 36)$$

was als Satz wie folgt ausgedrückt werden kann:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse (ab, cd) von dem Werte m den zweiten mit dem vierten Punkt und bildet mit den so erhaltenen Punkten ein neues Doppelverhältnis (ad, cb), so ist der Wert desselben gleich $\frac{m}{m-1}$."

Die Doppelverhältnisse der übrigen Reihen II bis IV, siehe Antwort der Frage 57, sind in ganz gleicher Weise von einander abgeleitet wie die der Reihe I und besitzen daher die nämlichen Werte.

Das in obiger Antwort Enthaltene kann offenbar kurz zusammengefasst als Satz so ausgesprochen werden:

„Die 24 Doppelverhältnisse, welche sich mit vier Punkten bezw. mit den durch die vier Punkte möglichen Strecken herstellen lassen, besitzen nur sechs von einander verschiedene Werte, die zu je vieren einander gleich sind."

Frage 59. Welche von den in Antwort der Frage 57 genannten 24 Doppelverhältnissen besitzen gleichen Wert?

Antwort. Wendet man die in Antwort der Frage 58 angeführten Sätze auch auf die in den Vertikalreihen II, III, IV, siehe Antwort der Frage 57, stehenden Doppelverhältnisse an und stellt die gleichen Werte nebeneinander in eine Horizontalreihe, so erhält man folgendes Schema:

$$
\left.\begin{array}{ll}
1) & (a\,b,\ c\,d) = (b\,a,\ d\,c) = (c\,d,\ a\,b) = (d\,c,\ b\,a) = m \\
2) & (a\,b,\ d\,c) = (b\,a,\ c\,d) = (d\,c,\ a\,b) = (c\,d,\ b\,a) = \dfrac{1}{m} \\
3) & (a\,c,\ b\,d) = (c\,a,\ d\,b) = (b\,d,\ a\,c) = (d\,b,\ c\,a) = 1-m \\
4) & (a\,c,\ d\,b) = (c\,d,\ b\,d) = (d\,b,\ a\,c) = (b\,d,\ c\,a) = \dfrac{1}{1-m} \\
5) & (a\,d,\ b\,c) = (d\,a,\ c\,b) = (b\,c,\ a\,d) = (c\,b,\ d\,a) = \dfrac{m-1}{m} \\
6) & (a\,d,\ c\,b) = (d\,a,\ b\,c) = (c\,b,\ a\,d) = (b\,c,\ d\,a) = \dfrac{m}{m-1}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad 37)
$$

Erkl. 92. Hat man auf einer Geraden A vier Punkte a, b, c, d und projiziert man dieselben aus einem Centrum o auf eine Gerade A', oder A'' oder A''' etc., so erhält man auf denselben je vier Punkte a', b', c', d', oder a'', b'', c'', d'' oder a''', b''', c''', d''' .... derart, dass stets die Beziehungen stattfinden:

$$(ab,\ cd) = (a'b',\ c'd') = (a''b'',\ c''d'') = (a'''b''',\ c'''d'''),$$

was aus Satz ausgedrückt so lautet:

„Der Wert eines Doppelverhältnisses, gebildet aus den Strecken von vier Punkten einer Geraden wird durch centrale Projektion nicht geändert."

Erkl. 93. Lässt man einen Punkt der Geraden A die letztere durchlaufen und projiziert ihn in jeder Lage auf A', A'', A''' ..., so entsteht hierdurch auf jeder der Geraden A' bis A''' ... je eine Punktreihe und diese sämtlichen Punktreihen sind projektiv in perspektivischer Lage, d. h. zwischen je vier Punkten der einen Geraden und vieren auf denselben durch o gehenden Linien liegenden Punkte einer der übrigen Geraden findet Doppelverhältnisgleichheit statt.

Erkl. 94. Betrachtet man den Schnittpunkt der Träger zweier projektiven und perspektivisch liegenden Punktreihen, so findet man, dass in demselben ein Paar entsprechender Punkte vereinigt sind, woraus unmittelbar folgt, dass, wenn man zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage so legt, dass im Schnittpunkt ihrer Träger ein Paar entsprechender Punkte sich vereinigen, diese Punktreihen perspektivisch liegen. Man erhält folgende Sätze:

„Zwei projektive Punktreihen liegen perspektivisch, wenn im Schnittpunkt ihrer Träger entsprechende Punkte vereinigt sind."

„Zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage lassen sich auf unendlich viele Arten perspektivisch legen."

Von welcher Beschaffenheit ist der Ort der Projektionscentra?

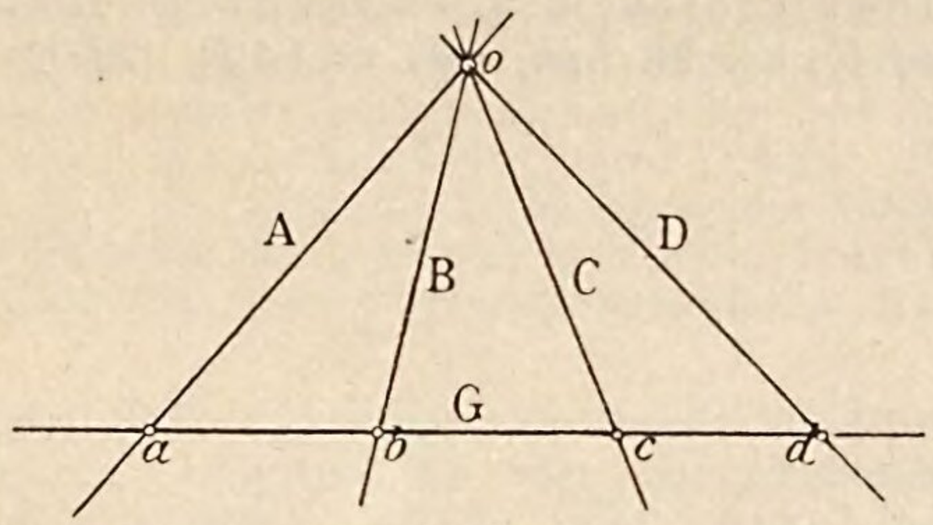
Gleichung 37 enthält aber folgenden wichtigen Satz:

„Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse $(a\,b,\ c\,d)$ entweder die Punkte eines jeden Punktpaares oder aber die Punktpaare selbst, oder endlich die Punktpaare und nachdem dies geschehen in jedem Paar die Punkte unter sich, und bildet nach der Vertauschung mit den Punkten wieder ein Doppelverhältnis, so ist der Wert des neuen Doppelverhältnisses stets gleich dem Werte des urspünglich gegebenen Doppelverhältnisses."

Erkl. 95. Die vom Centrum nach den Punkten einer Punktreihe gezogenen geraden Verbindungslinien sollen für die Folge kurzweg Strahlen genannt werden. Die Gesamtheit aller nach den Punkten einer Geraden möglichen Strahlen nennt man einen Strahlbüschel. Ein Strahlbüschel schneidet auf jeder Geraden eine Punktreihe aus, oder anders ausgedrückt kann man auch sagen: Die Centralprojektion eines Strahlbüschels ist eine Punktreihe. Man nennt ersteres wohl auch den Schein der Punktreihe.

Frage 60. Besteht zwischen den Strahlen eines Strahlbüschels und seiner Centralprojektion auf eine Gerade A ein Zusammenhang und welcher?

Figur 113.



Erkl. 96. Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass man den doppelten Flächeninhalt eines Dreiecks erhält, wenn man das Produkt zweier Seiten multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

(Siehe Kleyer's Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.)

Erkl. 97. Das Doppelverhältnis zwischen den Sinusen der Winkel von vier Strahlen A, B, C, D eines Strahlbüschels nennt man das Doppelverhältnis der vier Strahlen und bezeichnet es kurz so (AB, CD). Dabei werden ähnlich wie bei dem Doppelverhältnis von vier Punkten die Strahlen in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge gezählt; man bezeichnet demgemäss den Strahl A als ersten, B als zweiten, C als dritten und D als vierten Strahl, desgleichen nennt man die Strahlen A und B ebenso C und D je ein zusammengehöriges oder conjugiertes Strahlenpaar, und zwar ist AB das erste, CD das zweite conjugierte Strahlenpaar; häufig bezeichnet man B und C wohl auch als innere, A und D als äussere Strahlen.

Erkl. 95 a. Aus der Planimetrie ist bekannt, dass die Flächeninhalte von Dreiecken mit der nämlichen Höhe sich verhalten wie die Grundlinien der Dreiecke.

(Siehe Kleyer's Lehrbuch der Planimetrie.)

Antwort. Bezeichnet man die Winkel, welche zwischen den Strahlen A, B, C, D ... eines Büschels auftreten mit $A\hat{C}$, $B\hat{C}$, $A\hat{D}$, $B\hat{D}$ etc., so kann man aus der Figur folgende Beziehungen entnehmen.

Zunächst finden die Verhältnisse statt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\triangle\, oac}{\triangle\, obc} &= \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} \quad \ldots \text{ siehe Erkl. 95 a} \\ \frac{\triangle\, oad}{\triangle\, obd} &= \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} \quad \ldots \text{ siehe Erkl. 95 a} \end{aligned}\right\} \ldots 38)$$

Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} 2\triangle\, oac &= \overline{oa}\,.\,\overline{oc}\,.\,\sin A\hat{C} \\ 2\triangle\, obc &= \overline{ob}\,.\,\overline{oc}\,.\,\sin B\hat{C} \\ 2\triangle\, oad &= \overline{oa}\,.\,\overline{od}\,.\,\sin A\hat{D} \\ 2\triangle\, obd &= \overline{ob}\,.\,\overline{od}\,.\,\sin B\hat{D} \end{aligned}\right\} \ldots 39)$$

Die Gleichungen 38 können somit in Rücksicht auf die Beziehungen 39 wie folgt angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\overline{oa}\,.\,\overline{oc}\,.\,\sin A\hat{C}}{\overline{ob}\,.\,\overline{oc}\,.\,\sin B\hat{C}} &= \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} \\ \frac{\overline{oa}\,.\,\overline{od}\,.\,\sin A\hat{D}}{\overline{ob}\,.\,\overline{od}\,.\,\sin B\hat{D}} &= \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} \end{aligned}\right\} \ldots 40)$$

woraus sich folgende Gleichung bilden lässt:

$$\frac{\dfrac{\overline{oa}\,.\,\sin A\hat{C}}{\overline{ob}\,.\,\sin B\hat{C}}}{\dfrac{\overline{oa}\,.\,\sin A\hat{D}}{\overline{ob}\,.\,\sin B\hat{D}}} = \frac{\dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\dfrac{\overline{ad}}{\overline{bd}}}$$

oder

$$\frac{\dfrac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}}}{\dfrac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}}} = \frac{\dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\dfrac{\overline{ad}}{\overline{bd}}} \quad \ldots 41)$$

Erkl. 98. Ist ein Doppelverhältnis in der abgekürzten Form (AB, CD) angeschrieben, so bildet man dasselbe genau in derselben Weise wie das Doppelverhältnis von vier Punkten. Man schreibt also A und B unter einander und verbindet jeden der Punkte mit C zu einem Verhältnis so: $\frac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}}$, hierauf schreibt man wieder A und B unter einander und verbindet sie mit D zu einem Verhältnis so: $\frac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}}$; aus beiden Verhältnissen entsteht das Doppelverhältnis

$$\frac{\frac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}}}{\frac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}}} = (AB, CD) \quad . \; . \; . \quad 42)$$

Erkl. 99. Da die Lagen der Geraden G gegen das **Pr. C.** o in Gleichung 41 nicht in Betracht kommt, so folgt, was auch mit Bezug auf Erkl. 92 und 93 selbstverständlich ist, dass das Doppelverhältnis $(ABCD)$ stets gleich ist dem Doppelverhältnis der Schnittpunkte von irgend welcher Geraden mit den Strahlen des Büschels. Sind demnach G, G', G'', G''' eine Reihe von Geraden, welche die Strahlen des Büschels der Reihe nach in den Punkten $a, b, c, d \ldots$, $a', b', c', d' \ldots$, $a'', b'', c'', d'' \ldots$, $a''', b''', c''', d''' \ldots$ schneiden, so findet stets die Beziehung statt:

$$(AB, CD) = (ab, cd) = (a'b', c'd') =$$
$$(a''b'', c''d'') = (a'''b''', c'''d''') \quad . \; . \; . \quad 43)$$

Erkl. 100. Lässt man auf G einen Punkt fortrücken und bestimmt stets den durch ihn gehenden Strahl des Büschels, so stehen je vier Punkte der Punktreihe auf G und die vier durch sie gehenden Strahlen des Büschels in dem Zusammenhange der Doppelverhältnisgleichheit zwischen Punkten und Strahlen, d. h. es gilt, wenn p irgend ein Punkt der Reihe, P der entsprechende Strahl ist, stets die Gleichheit:

$$(ab, cp) = (AB, CP \text{ oder } acdp) =$$
$$(AC, DP) \text{ etc.} \quad . \; . \; . \; . \quad 44)$$

Man bezeichnet diesen Zusammenhang wieder mit Projektivität und nennt Punktreihe und Strahlbüschel projektiv, und zwar in perspektivischer Lage. Lässt man die Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen je vier Punkten und den entsprechenden Strahlen bestehen, dreht oder verschiebt bezw. dreht und verschiebt die Gerade oder das Strahlbüschel in beliebiger Weise in der Ebene oder im Raume, so bleiben Punktreihe und Strahlbüschel stets projektiv, aber man sagt jetzt, sie befinden sich in allgemeiner Lage.

Die linke Seite der Gleichung 41 stellt ein Doppelverhältnis dar, gebildet aus den Sinusen der Winkel zwischen den Strahlen A, C, B, C, A, D und B, D des Büschels, die rechte Seite dagegen gibt das Doppelverhältnis zwischen jenen Strecken, welche die Durchschnittspunkte der eben genannten Strahlen auf der Geraden A begrenzen; die Gleichung selbst sagt aus, dass die Werte beider Doppelverhältnisse einander gleich sind.

Als Satz kann man das eben Gesagte so ausdrücken:

„Schneidet man die Strahlen eines Büschels durch eine Gerade und bildet das Doppelverhältnis zwischen den Strecken der vier Schnittpunkte, desgleichen das Doppelverhältnis zwischen den Sinusen der Winkel der durch die Schnittpunkte gehenden Strahlen, so sind die so gebildeten Doppelverhältnisse einander gleich, d. h. es ist in Rücksicht auf Erkl. 96 $(ab, cd) = (AB, CD)$."

Erkl. 101. Ein Strahlbüschel, dessen Strahlen A, B, C . . . sämtlich durch einen Punkt o gehen, bezeichnet man kurzweg mit o (A, B, C . . .) und nennt den Punkt o den Mittelpunkt des Büschels.

Frage 61. Kann es vorkommen, dass eine Gerade bezw. eine Punktreihe, die Centralprojektion mehrerer Strahlbüschel zugleich ist; welcher Zusammenhang besteht zwischen solchen Strahlbüscheln?

Erkl. 102. Unter entsprechenden Strahlen beider Büschel sind solche zu verstehen, welche sich im nämlichen Punkte von G treffen.

Erkl. 103. Zwei Strahlbüschel, welche dieselbe Centralprojektion auf einer Geraden G besitzen, für welche diese Doppelverhältnisgleichheit zwischen je vier entsprechenden Strahlen besteht, heissen projektive Strahlbüschel in perspektivischer Lage. Die Gerade G, die centrale Projektion beider Strahlbüschel heisst ihr perspektivischer Durchschnitt oder ihre perspektivische Achse.

Erkl. 104. Lässt man die Doppelverhältnisgleichheit zwischen je vier entsprechenden Strahlen bestehen, dreht oder verschiebt bezw. dreht und verschiebt eines der beiden Strahlbüschel oder beide in der Ebene oder beliebig im Raume, so bleiben die Strahlbüschel stets projektiv, aber man sagt jetzt, sie befinden sich in allgemeiner Lage.

Erkl. 104 a. Zwei projektive Strahlbüschel in perspektivischer Lage besitzen die Verbindungslinie oo' ihrer Mittelpunkte als ein sich selbst entsprechendes Strahlenpaar.

Umgekehrt befinden sich zwei projektive Strahlbüschel stets in perspektivischer Lage, wenn in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechende Strahlen zusammenfallen.

„Zwei projektive Strahlbüschel in perspektivischer Lage sind vollkommen bestimmt, sobald man zwei Paare entsprechender Strahlen kennt.“

Erkl. 104 b. Aus dem in Erkl. 104 a Gesagten folgt unmittelbar weiter, dass zwei projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage sich auf unendlich viele Arten perspektivisch legen lassen. Man braucht zu diesem Zwecke ja nur ein Paar entsprechender Strahlen aufeinander zu legen.

Antwort. Ist G der Träger einer Punktreihe und letztere die centrale Projektion des Strahlbüschels o (A, B, C . . . .), so kann man die Punkte a, b, c, d . . . . der Punktreihe mit einem beliebigen Punkt o' der Ebene des Büschels o (A, B, C) oder des Raumes verbinden, und erhält dann ein neues Strahlbüschel o' (A', B', C' . . .), dessen Centralprojektion wiederum die Punktreihe auf G ist. Mit Bezugnahme auf die Antwort der Frage 60 finden nun aber folgende Beziehungen statt.

Es ist

$$(abcd) = (AB,\ CD),$$

ferner

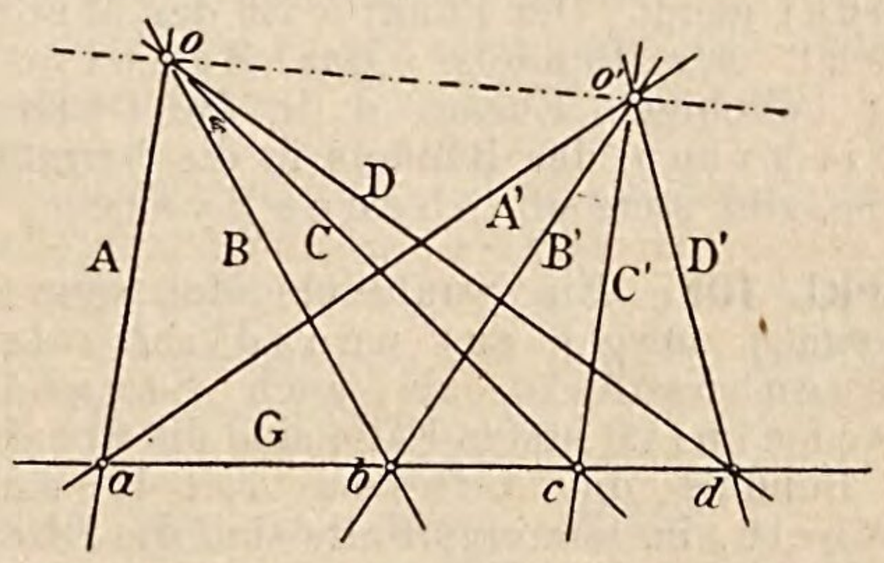
$$abcd = (A'B',\ C'D'),$$

daher auch

$$(ABCD) = (A'B',\ C'D') \quad . \ . \ . \quad 45)$$

d. h. zwischen den Strahlen A und A', B und B', C und C' . . ., welche man kurz entsprechende Strahlen nennt, siehe Erkl. 102, findet die Beziehung statt, dass das Doppelverhältnis zwischen vier Strahlen des einen Büschels, gleich ist dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des anderen Büschels.

Figur 114.



Frage 62. Besteht zwischen den Ebenen eines Ebenenbüschels, siehe Erkl. 105, und dessen centralen Projektionen auf eine Ebene ein Zusammenhang und welcher?

Erkl. 105. Legt man durch einen beliebigen Punkt o' des Raumes durch alle Strahlen eines Strahlbüschels o (A, B, C . . .) Ebenen, so enthalten dieselben alle die Verbindungslinie $o\,o'$ oder O und bilden ein Ebenenbüschel; jeder die Gerade O nicht enthaltende Schnitt dieses Ebenenbüschels, d. h. die Centralprojektion des Ebenenbüschels aus dem Centrum o' in die genannte Ebene des Ebenenbüschels ist ein Strahlbüschel. Die Gerade O, d. i. die Verbindungslinie $o\,o'$ heisst die Achse oder auch der Scheitel des Ebenenbüschels.

Bezeichnet man die Ebene des Büschels mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so lässt sich ein Ebenenbüschel symbolisch so anschreiben $O\ (\alpha, \beta, \gamma \ldots)$.

Erkl. 106. In gleicher Weise wie zwischen Strahl- und Ebenenbüschel besteht auch Projektivität zwischen Punktreihe und Ebenenbüschel und zwar in perspektivischer oder allgemeiner Lage je nachdem die Ebenen des Büschels durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe gehen oder nicht.

Erkl. 107. Betrachtet man die Gesamtheit aller Punkte und Geraden einer Ebene, so kann man diese Gesamtheit als ein ebenes Gebilde oder auch ebenes System bezeichnen. Dasselbe umfasst unendlich viele Punktreihen, desgleichen unendlich viele Strahlbüschel, je nachdem man die Geraden der Ebene als Träger von Punktreihen oder die Punkte desselben als Mittelpunkte von Strahlbüscheln auffasst; die Ebene des Systems heisst dessen Träger.

Erkl. 108. Zieht man von sämtlichen Punkten oder Geraden eines ebenen Systems nach einem nicht in der Ebene des Systems liegenden Punkte o Strahlen, so erhält man ein neues Gebilde, das man ein Strahlenbündel nennt. Der Punkt o ist der Mittelpunkt des Bündels. Der Schnitt mit einer beliebigen Ebene, d. h. die Centralprojektion des Bündels in die betreffende Ebene gibt stets ein ebenes System.

Erkl. 109. Ein Strahlenbündel setzt sich zusammen sowohl aus unendlich vielen Ebenenbüscheln als auch Strahlenbüscheln; im ersten Falle sind die Strahlen des Bündels die Achsen von Ebenenbüscheln, im letzteren Falle sind die Ebenen des Bündels die Träger der Strahlenbüschel des Bündels.

Ein Strahlenbündel kann somit mit gleichem Rechte auch als Ebenenbündel bezeichnet werden.

Antwort. Nimmt man irgend vier der Ebenen des Ebenenbüschels heraus, etwa die Ebenen α, β, γ, δ, so lässt sich mit den Sinusen der Winkel von je zweien Ebenen ein Doppelverhältnis bilden, das z. B. so lauten kann

$$\frac{\sin \hat{\alpha\gamma}}{\sin \hat{\beta\gamma}} : \frac{\sin \hat{\alpha\delta}}{\sin \hat{\beta\delta}},$$

und welches Doppelverhältnis ersetzt werden darf durch ein Doppelverhältnis von vier Strahlen, nämlich der Schnittlinien einer zur Achse des Ebenenbüschels senkrechten Ebene mit den Ebenen des Büschels; heissen diese Schnittlinien A_0, B_0, C_0, D_0, so findet die Gleichheit statt: $(\alpha\beta, \gamma\delta) = (A_0 B_0, C_0 D_0)$. Schneidet man nun das Strahlbüschel o_0 ($A_0 B_0 C_0 \ldots$) durch eine beliebige Gerade nach der Punktreihe a_0, b_0, c_0 . ., so kann man jeden beliebigen Punkt o' der Achse des Ebenenbüschels als Mittelpunkt eines mit der Punktreihe a_0, b_0, c_0 . . perspektivisch liegenden Strahlbüschels wählen, so dass stets die Beziehung stattfindet:

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = (A_0 B_0, C_0 D_0) = (A'B', C'D') = (A''B'', C''D'') \quad . \ . \ . \ . \ . \quad 46)$$

Nun lässt sich aber das Strahlbüschel o' ($A'B'C'$ . .) oder o'' ($A''B''C''$ . .) in den Ebenenbüschel beliebig verschieben, ohne dass das Doppelverhältnis von 4 Strahlen geändert wird, so dass man den Satz aussprechen kann:

„Schneidet man ein Ebenenbüschel durch eine Ebene, so findet zwischen Strahlen des Strahlbüschels und den Ebenen des Ebenenbüschels Projektivität in perspektivischer Lage statt.“

Lässt man Doppelverhältnisgleichheit zwischen Strahlen und Ebenenbüschel bestehen und dreht das Ebenen- und Strahlbüschel in beliebiger Weise, so bleiben Ebenen- und Strahlbüschel stets projektiv, befinden sich aber nun in allgemeiner Lage.

Frage 63. Besteht zwischen den in den Erkl. 107 bis 109 genannten Gebilden: Ebenes System, Bündel und räumliches System gleichfalls eine projektive Beziehung und welche?

Erkl. 110. Nimmt man den ganzen unendlichen Raum als geometrische Raumgrösse, welche man ein räumliches System nennen kann, so lässt sich das räumliche System auffassen als der Inbegriff sämtlicher ebenen Systeme, bezw. Bündel, d. h. sämtlicher Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes. Jeder Punkt des Raumes ist Mittelpunkt eines Bündels, jede Gerade ist Träger einer Punktreihe oder Achse eines Ebenenbüschels, jede Ebene Träger eines ebenen Systemes.

Erkl. 111. Die in der vorhergehenden Erkl. genannten sechs Gebilde: Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel, ebenes System, Strahlen- oder Ebenenbündel, räumliches System heissen die sechs Grundgebilde der Geometrie.

Man bezeichnet dabei die Grundgebilde: Punktreihe, Strahlbüschel und Ebenenbüschel als Grundgebilde der ersten Stufe; die Grundgebilde: Ebenenbüschel und Ebenenbündel oder Strahlenbündel als Grundgebilde der zweiten Stufe, endlich das räumliche System das Grundgebilde der dritten Stufe.

Die drei ersten Gebilde, d. h. die Grundgebilde der ersten Stufe besitzen als Elemente lediglich: Punkt, Gerade und Ebene, die Grundgebilde der zweiten Stufe besitzen als Elemente nicht nur die eben genannten Raumgrössen, sondern auch noch die Punktreihe und das Strahlbüschel. Das Grundgebilde der dritten Stufe endlich besitzt als Elemente nicht nur Punkte, Geraden und Ebenen, sondern auch die Grundgebilde der ersten und der zweiten Stufe.

Antwort. In gleicher Weise wie man Punktreihe, Strahlbüschel und Ebenenbüschel projektiv auf einander beziehen kann, lässt sich dies auch mit den in Frage 63 genannten Gebilden vornehmen. So kann man z. B. ein Strahlenbündel durch mehrere nicht durch dessen Mittelpunkt gehenden Ebenen schneiden und erhält hierdurch in jeder Schnittebene ein ebenes System und diese Systeme stehen in der Beziehung zu einander, dass jedem Punkte des einen Systems ein Punkt, jeder Punktreihe wieder eine Punktreihe, jeder Geraden wieder eine Gerade, endlich jedem Strahlbüschel wieder ein Strahlbüschel projektiv in perspektivischer Lage d. h. centrisch-collinear in jedem Systeme entspricht. Zwei oder mehrere in dieser Weise aufeinander bezogene ebene Systeme nennt man projektiv in perspektivischer Lage oder auch centrisch-collinear. Lässt man den projektiven Zusammenhang zwischen den ebenen Systemen bestehen, dreht sie aber beliebig im Raume, so bleiben die Systeme projektiv, oder collinear, befinden sich aber nunmehr in allgemeiner Lage. Desgleichen ist auch das projizierende Bündel projektiv auf das ebene System bezogen, denn jedem Strahle des Bündels entspricht ein Punkt, jedem Strahlbüschel eine Punktreihe, jeder Ebene eine Gerade, jedem Ebenenbüschel ein Strahlbüschel projektiv in perspektiver Lage oder centrisch-collinear im ebenen System.

Lässt man den genannten projektiven Zusammenhang ungeändert, dreht aber das ebene System oder das Bündel oder beide zugleich beliebig gegeneinander, so bleiben die genannten Gebilde projektiv oder collinear, befinden sich aber nunmehr in allgemeiner Lage.

Verbindet man ein ebenes System mit zweien nicht in der Ebene des Systemes befindlichen Punkten, so erhält man zwei Strahlenbüschel derart, dass jedem Strahle des einen Bündels wieder ein Strahl, jedem Strahlbüschel wieder ein Strahlbüschel, endlich jedem Ebenenbüschel wieder ein Ebenenbüschel projektiv in perspektivischer Lage entspricht. Zwei derart auf einander bezogene Strahlbündel heissen dann selbst projektiv in perspektivischer Lage.

Lässt man den projektiven Zusammenhang bestehen, dreht aber sonst die beiden Bündel beliebig gegeneinander, so erhält man zwei projektive Bündel in allgemeiner Lage oder zwei collineare Bündel.

Verbindet man endlich ein räumliches System mit einem beliebigen Punkt *o* desselben Raumes durch ein Strahlenbündel, schneidet letzteres durch eine Ebene *E*, so kann man ein zweites räumliches System sich derart denken, dass letzteres mit dem Punkte *o* verbunden das nämliche Strahlenbündel liefert und die Ebene *E* nach dem nämlichen ebenen System schneidet; es entspricht dann jedem Punkte des einen räumlichen Systemes ein Punkt des anderen, gelegen auf demselben Strahle des Bündels, jeder Geraden wieder eine Gerade, welche sich im nämlichen Punkte von *E* schneiden, jeder Ebene wieder eine Ebene, welche die nämliche Gerade auf *E* gemein haben; endlich entspricht jeder Punktreihe im einen System eine Punktreihe im anderen, jedem Strahlbüschel ein Strahlbüschel, jedem Ebenenbüschel ein Ebenenbüschel, jedem Bündel wieder ein Bündel. Entsprechende Punktreihen, Strahlbüschel, Ebenenbüschel, Ebenenbündel liegen perspektivisch zu einer bestimmten Punktreihe, einem bestimmten Strahlenbüschel oder einem ebenen System der Ebene *E*. Zwei derart auf einander bezogene räumliche Systeme heissen projektiv in perspektivischer oder centrisch-collinearer Lage.

Lässt man den projektiven Zusammenhang bestehen und dreht die räumlichen Systeme beliebig gegeneinander, so erhält man zwei projektive räumliche Systeme in allgemeiner Lage oder zwei collineare räumliche Systeme.

Anmerkung 13. Die sechs Grundgebilde lassen sich in der mannigfaltigsten Weise auf einander beziehen; diese Beziehungen zu untersuchen ist die Aufgabe der projektiven Geometrie. Im folgenden soll hiervon nur so viel mitgeteilt werden, als für das Studium der darstellenden Geometrie notwendig erscheint.

Anmerkung 14. Es ist hier gleich der Ort, auf ein wichtiges, grundlegendes Gesetz in der Geometrie aufmerksam zu machen, das bezüglich des Zusammenhanges zwischen den Raumgrössen Punkt, Gerade und Ebene existiert, sobald es sich lediglich um die Lagenverhältnisse dieser Raumgrössen handelt.

In ein und derselben Ebene kann man nämlich einem Punkt nicht nur wieder einen Punkt, sondern auch eine Gerade entsprechen lassen, indem man sich nämlich erstere Raumgrösse als Schnittpunkt zweier Geraden, letztere als Verbindungslinie zweier Punkte darstellt. Man sagt in diesem Falle der Punkt und die Gerade seien reciprok auf einander bezogen.

Desgleichen kann man im Raume einen Punkt und eine Ebene aufeinander beziehen, indem man den Punkt auffasst als Schnittpunkt dreier Ebenen, die Ebene aber als bestimmt nimmt durch drei Punkte. Man sagt dann wieder, der Punkt und die Ebene seien reciprok auf einander bezogen; desgleichen lässt sich aber auch eine Gerade reciprok auf eine Gerade beziehen, indem man sie einerseits auffasst als Verbindungslinie zweier Punkte, andererseits als Schnittlinie zweier Ebenen. Den eben genannten reciproken Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade, Punkt und Ebene und Gerade und Gerade nennt man das Gesetz der Reciprocität oder Dualität und es ist dasselbe dadurch charakterisiert, dass jeder geometrischen Wahrheit, d. h. jedem Satze, der sich auf eine bestimmte Aufeinanderfolge von Punkten bezieht, in der Ebene ein Satz gegenübersteht, der sich in bestimmter Weise auf eine Aufeinanderfolge von Geraden, im Raume aber auf eine bestimmte Aufeinanderfolge von Ebenen bezieht.

Mit Bezugnahme auf die kennen gelernten sechs Grundgebilde kann man folgende Reciprocitäten unterscheiden: die Punktreihe ist reciprok zum Strahl- und Ebenenbüschel.

Das Strahlbüschel ist sich selbst reciprok. Desgleichen ist das Strahlenbündel aufgefasst als ein Gebilde von lauter Geraden reciprok dem ebenen System gleichfalls aufgefasst als ein Gebilde von lauter Geraden oder aber das Bündel aufgefasst als ein Gebilde von lauter Ebenen ist reciprok dem ebenen System, aufgefasst als ein Gebilde von lauter Punkten.

Zwei ebene Systeme sind gleichfalls reciprok auf einander bezogen, wenn jedem Punkte des einen Systems eine Gerade des anderen entspricht.

Zwei Strahlenbündel sind endlich reciprok auf einander bezogen, wenn jedem Strahle des einen Bündels eine Ebene des anderen entspricht.

Erkl. 112. Im folgenden sollen einige Sätze angeführt werden, welche das Gesetz der Reciprocität deutlich erkennen lassen:

„Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, die Verbindungslinie der beiden Punkte.“	„Zwei Gerade bestimmen einen Punkt, den Schnittpunkt der beiden Geraden.“
„Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade, die Schnittlinie der beiden Ebenen.“	
„Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bestimmen eine Ebene.“	„Drei nicht durch eine Gerade gehenden Ebenen bestimmen einen Punkt.“
„Eine Gerade und ein Punkt ausserhalb derselben bestimmen eine Ebene.“	„Eine Gerade und eine Ebene, die nicht durch die Gerade geht, bestimmen einen Punkt.“
„Zwei Gerade, die einen gemeinsamen Punkt haben, bestimmen eine Ebene.“	„Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, bestimmen einen Punkt.“
„Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht durch denselben Punkt gehen, so liegen sie in einer Ebene.“	„Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht in einer Ebene liegen, so gehen sie durch denselben Punkt.“

Erkl. 113. Im Raume sind z. B. das Dreieck und das Dreikant reciprok, denn das erstere kann aufgefasst werden als Verbindungslinie von dreien Punkten, das letztere aber als Schnittfigur von dreien Ebenen. Dabei entspricht dem Scheitel des Dreikants reciprok die Dreiecksebene, den Seitenflächen des Dreikants entsprechen die Dreiecksecken, den Kanten des Dreikants die Dreiecksseiten.

Kennt man somit einen Satz über das Dreieck, so lässt sich stets ein entsprechender reciproker Satz über das Dreikant aussprechen. So stehen z. B. die folgenden beiden Sätze einander reciprok gegenüber:

„Zwei Dreiecke abc und $a'b'c'$, deren entsprechende Seiten ab, $a'b'$, ac, $a'c'$, bc, $b'c'$ sich in Punkten einer Geraden schneiden, liegen so, dass die Verbindungslinien aa', bb', cc' durch einen festen Punkt gehen.“

„Zwei Dreikante $s\,(ABC)$ und $s'\,(A'B'C')$, deren entsprechende Kanten A und A', B und B', C und C' in dreien Ebenen liegen, die sich nach derselben Geraden ss' schneiden, liegen so, dass die Verbindungslinien der Schnittpunkte von A und A', B und B', C und C' einer Ebene angehören.“

Erkl. 114. Hat man irgend eine Raumgrösse, z. B. einen Körper, so lässt sich zu demselben stets ein zweiter Körper denken, der dem ersten reciprok entspricht, wenn man nur den Ecken des ersten Körpers ebensoviele Ebenen reciprok entsprechen lässt. Der reciproke Körper zu einem gegebenen besitzt also stets so viele Begrenzungsflächen als der ursprüngliche Körper Ecken hat; die Zahl der Kanten ist in beiden Körpern gleich, siehe auch Erkl. 91, II. Teil.

G) Ueber die harmonische Teilung. Harmonische Gebilde.

Frage 64. Gibt es unter den Werten der Doppelverhältnisse von vier Punkten, Strahlen oder Ebenen solche, welchen eine besondere Wichtigkeit beizulegen ist und welche Werte sind dies?

Antwort. Unter den Doppelverhältnissen, welche mit den Elementen: Punkt, Gerade und Ebene gebildet werden können, verdient besonders jenes Doppelverhältnis eine besondere Beachtung, das einen Wert gleich der negativen Einheit besitzt, für welche demnach die Gleichheit besteht:

$$(ab, cd) = (AB, CD) = (\alpha\beta, \gamma\delta) = -1 \quad \ldots \; 47)$$

Betrachtet man zunächst das Doppelverhältnis von vier Punkten etwas näher, so kann man die Gleichung $(ab, cd) = -1$ auch so schreiben:

$$\frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}}} = -1$$

oder

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = -\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{da}}{\overline{bd}} \quad \ldots \; 48)$$

Erkl. 115. Vier Punkte, Strahlen oder Ebenen, bei welchen der in Antwort der Frage 64 gebildete Zusammenhang besteht, heissen harmonisch. Man spricht also von vier harmonischen Punkten, Strahlen und Ebenen und nennt die Teilung der Strecken oder des Winkels zweier Geraden der Ebenen in der in Antw. der Frage 64 genannten Art eine harmonische Teilung.

Erkl. 116. Für den Wert $m = -1$ werden die übrigen fünf Werte, welche die mit vier

Die Gleichung 48 sagt, dass die vier Punkte a, b, c, d, deren Doppelver-

Punkten zu bildenden Doppelverhältnisse noch annehmen können, siehe Gleichung 37,

$$\frac{1}{m} = -1 \quad \ldots \quad 54)$$

$$\left.\begin{aligned} 1-m &= +2 \\ \frac{1}{1-m} &= +\frac{1}{2} \\ \frac{1-m}{m} &= +2 \\ \frac{m}{1-m} &= +\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 55)$$

Gleichung 54 sagt, dass wenn man in vier harmonischen Punkten die Punkte eines zusammengehörigen Punktpaares oder die Punkte eines Punktpaares und hierauf die Punktpaare selbst vertauscht, so bleiben die Punkte in ihrer neuen Aufeinanderfolge stets harmonisch.

Gleichung 55 sagt, dass wenn ein Doppelverhältnis von vier Punkten den Wert $\frac{1}{2}$ oder 2 besitzt, die vier Punkte in einer bestimmten anderen Aufeinanderfolge stets vier harmonische Punkte bilden."

Das eben Gesagte gilt in entsprechender Weise auch für vier harmonische Strahlen oder Ebenen.

Erkl. 117. Die übrigen Werte, welche aus dem Werte $m = 1$, mit Bezugnahme auf Gleichung 37 entspringen, sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{1} = 1 \\ 1-m &= 1-1 = o \\ \frac{1}{1-m} &= \frac{1}{o} = \infty \\ m-1 &= o \\ \frac{m}{m-1} &= \frac{1}{o} = \infty \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 53)$$

In Rücksicht auf die Gleichungen 51 und 53 kann man daher die Sätze aussprechen:

„Wenn ein Doppelverhältnis von vier Punkten, Strahlen oder Ebenen einen Wert gleich der positiven Einheit oder gleich Null oder endlich gleich Unendlich besitzt, so fallen von den vier Elementen immer je zwei zusammengehörige Elemente zusammen."

„Wenn von vier Punkten, Strahlen oder Ebenen je zwei zusammengehörige Elemente zusammenfallen, so ist der Wert der zwischen ihnen möglichen Doppelverhältnisse gleich $+1$, o oder ∞.

hältnis den Wert gleich -1 besitzt, auf einer Geraden so verteilt sind, dass je zwei zusammengehörige Punkte wie a und b, die von dem anderen Paar zusammengehöriger Punkte c und d gebildete Strecke in dem nämlichen Verhältnis teilen.

Betrachtet man die Gleichung $(AB, CD) = -1$ etwas näher, so lässt sich dieselbe auch so schreiben:

$$\frac{\frac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}}}{\frac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}}} = -1$$

oder

$$\frac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}} = -\frac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}} = \frac{\sin D\hat{A}}{\sin B\hat{D}} \quad \ldots \quad 49)$$

In gleicher Weise erhielte man auch

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = -1$$

oder

$$\frac{\frac{\sin \alpha\hat{\gamma}}{\sin \beta\hat{\gamma}}}{\frac{\sin \alpha\hat{\delta}}{\sin \beta\hat{\delta}}} = -1$$

oder

$$\frac{\sin \alpha\hat{\gamma}}{\sin \beta\hat{\gamma}} = -\frac{\sin \alpha\hat{\delta}}{\sin \beta\hat{\delta}} = \frac{\sin \delta\hat{\alpha}}{\sin \beta\hat{\delta}} \quad \ldots \quad 50)$$

d. h. vier Strahlen eines Strahlbüschels oder vier Ebenen eines Ebenenbüschels, bei welchen das zwischen den Sinusen der Winkel zusammengehöriger Strahlen oder Ebenen gebildete Doppelverhältnis den Wert gleich der negativen Einheit besitzt, liegen so, dass je zwei zusammengehörige Strahlen oder Ebenen den von dem anderen Paar zusammengehöriger Strahlen oder Ebenen gebildeten Winkel in dem nämlichen Verhältnis teilen.

Ein Doppelverhältnis kann insbesondere einen Wert gleich der positiven Einheit besitzen; man erhält in diesem Falle die Gleichung

$$(ab, cd) = (AB, CD) = (\alpha\beta, \gamma\delta) = +1 \quad \ldots \quad 51)$$

Betrachtet man zunächst die Gleichung $(ab, cd) = +1$ etwas näher, so kann man dieselbe auch so schreiben:

Erkl. 118. Da der Wert eines Doppelverhältnisses durch centrale Projektion nicht geändert wird, siehe Erkl. 92, so folgt, dass vier harmonische Punkte oder Strahlen central projiziert, stets wieder vier harmonische Punkte oder Strahlen liefern.

Schneidet man somit vier harmonische Strahlen durch eine Transversale, so erhält man stets vier harmonische Punkte, verbindet man vier harmonische Punkte mit einem beliebigen ausserhalb des Trägers der vier harmonischen Punkte befindlichen Punkte oder mit einer zum Träger windschiefen Geraden, so erhält man stets vier harmonische Strahlen bezw. Ebenen.

$$\frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}}} = +1$$

oder

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} \quad \ldots \quad 52)$$

Die Erfüllung dieser Gleichung ist nur dann möglich, wenn für den Fall die Punkte a und b eine Strecke begrenzen, der Punkt d mit dem Punkt c zusammenfällt.

H) Konstruktion harmonischer Gebilde.

Frage 65. Wie konstruiert man zu dreien auf einer Geraden gegebenen Punkten a, b, c, d den vierten harmonischen Punkt?

Erkl. 119. Die Punkte c und d, desgleichen a und b heissen zusammengehörige oder conjugierte Punkte, bezw. ein zusammengehöriges oder conjugiertes Punktpaar. Aus der in Antwort der Frage 65 gegebenen Konstruktion folgt zunächst über die Lage von vier harmonischen Punkten die Beziehung, dass die von einem conjugierten Punktpaar gebildete Strecke durch das andere Punktpaar in einem inneren und äusseren Punkte geteilt wird.

Erkl. 120. Lässt man den Punkt c, siehe Figur 115, in der Richtung nach b sich fortbewegen, so bewegt sich der Punkt d gleichfalls in der Richtung nach b zu und fällt mit letzterem Punkte zusammen, sobald dies bezüglich des Punktes c der Fall ist. Rückt dagegen der Punkt c nach dem Punkt a hin, so durchschreitet er zunächst die Mitte m von $\overline{ab}$; in diesem Falle wird aber, damit die Gleichung 56 erfüllt ist, der Punkt d in unendliche Ferne fallen. Hat c die Mitte m von ab überschritten und nähert sich dem Punkte a, so rückt auch der Punkt d vom Unendlichen nach dem Punkte d zu und fällt mit diesem zusammen, sobald dies bezüglich des Punktes geschieht.

Aus vorstehender Erklärung folgen die wichtigen Sätze:

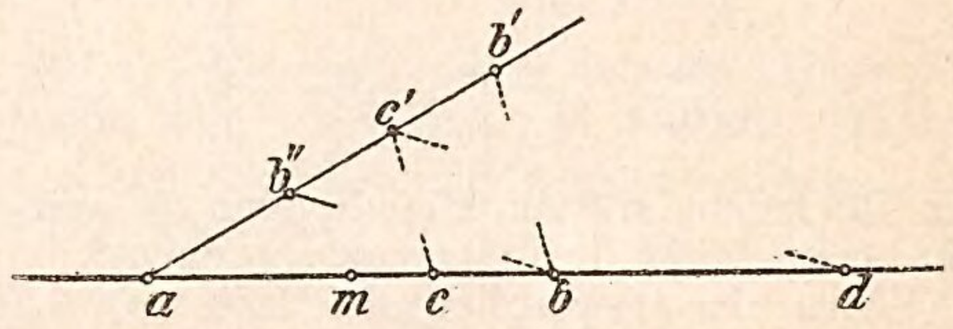
„Wenn von vier harmonischen Punkten ein Punkt des zweiten Punktpaares mit einem Pnnkte des ersten Punktpaares zusammenfällt, so fällt der andere Punkt des zweiten Punktpaares mit diesem Punkte zusammen."

„Der Halbierpunkt einer Strecke und der unendlich ferne Punkt einer Ge-

Antwort. Man trage auf einer beliebigen durch a gezogenen Geraden, siehe Figur 115, die Strecken $\overline{ac'}$ und $\overline{c'b'}$ im Verhältnis $\frac{\overline{ac}}{\overline{cb}}$ ab und mache überdies $\overline{c'b''}$, in der Richtung nach a hin abgetragen, gleich $\overline{c'b'}$. Die durch c' zu $b''b$ gezogene Parallele liefert auf der verlängerten ab den Punkt d, derart, dass nunmehr die Verhältnisgleichheit stattfindet:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = -\frac{\overline{ad}}{\overline{bd}} \quad \ldots \quad 56)$$

Figur 115.



raden bilden stets ein conjugiertes Punktpaar zu vier harmonischen Punkten, in welchen das zweite conjugierte Punktpaar durch die Endpunkte der Strecke dargestellt ist."

Erkl. 121. Bezeichnet m den Mittelpunkt der Strecke $\overline{ab}$, so finden in Rücksicht auf die Figur 115 und die Gleichung 56 die Beziehungen statt:

Es ist

$$\overline{ac} = \overline{am} + \overline{mc}$$

$$\overline{bc} = \overline{am} - \overline{mc}$$

$$\overline{ad} = \overline{md} + \overline{am}$$

$$\overline{bd} = \overline{md} - \overline{am}.$$

Gleichung 56 lässt sich somit auch so schreiben:

$$\frac{\overline{am} + \overline{mc}}{\overline{am} - \overline{mc}} = - \frac{\overline{md} + \overline{am}}{\overline{md} - \overline{am}}$$

oder anders ausgedrückt

$$- \overline{am} \cdot \overline{md} + \overline{md} \cdot \overline{mc} - \overline{am^2} + \overline{am} \cdot \overline{mc} =$$
$$- \overline{am} \cdot \overline{md} + \overline{md} \cdot \overline{mc} - \overline{am^2} + \overline{am} \cdot \overline{mc}$$

oder

$$2\,am^2 = 2\,md \cdot mc$$

$$\overline{am^2} = \overline{md} \cdot \overline{mc} = \overline{mc} \cdot \overline{md} \ldots 57)$$

In Worten ausgedrückt erhält man folgenden Satz:

Sind a, b, c, d vier harmonische Punkte auf einer Geraden und ist m der Mittelpunkt der durch ein conjugiertes Punktpaar begrenzten Strecke, z. B. $\overline{ab}$, so ist das Quadrat der Entfernungen des Punktes m von den Endpunkten a oder b gleich dem Rechteck aus den Entfernungen desselben Punktes m von den Endpunkten des zweiten conjugierten Punktpaares."

Erkl. 122. Die Gleichung $(AB, CD) = -1$ oder $(\alpha\beta, \gamma\delta) = -1$ oder

$$\frac{\sin A\hat{C}}{\sin B\hat{C}} = - \frac{\sin A\hat{D}}{\sin B\hat{D}}$$

bezw.

$$\frac{\sin \alpha\hat{\gamma}}{\sin \beta\hat{\gamma}} = - \frac{\sin \alpha\hat{\delta}}{\sin \beta\hat{\delta}}$$

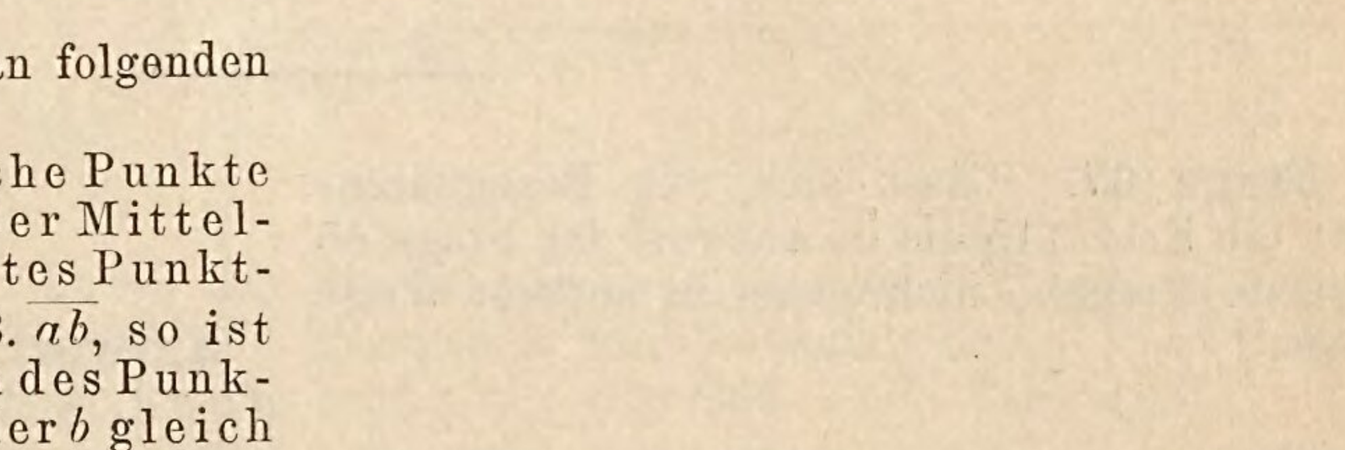
wird stets erfüllt, wenn

$A\hat{C} = C\hat{B}$, desgleichen $A\hat{D} = D\hat{B}$

bezw

$\alpha\gamma = \gamma\hat{\beta}$, desgleichen $\alpha\hat{\delta} = \delta\hat{\beta}$ ist,

Figur 116.



d. h. wenn die Strahlen A und D bezw. die Ebenen α und δ den Winkel der beiden anderen Strahlen bezw. Ebenen halbieren, was als Satz ausgedrückt wie folgt lautet:

„Zwei Strahlen bezw. Ebenen und die den Winkel derselben halbierenden Strahlen oder Ebenen bilden stets vier harmonische Strahlen oder Ebenen.“

Bewegt sich die innere Halbierungslinie oder Ebene von vier harmonischen Strahlen oder Ebenen gegen einen der beiden den Winkel bildenden Strahlen, bezw. gegen eine der beiden den Winkel bildenden Ebenen hin, so nähert sich auch die äussere Halbierende dem gleichen Strahle bezw. der gleichen Ebene und fällt damit zusammen, sobald die innere Halbierende damit zusammenfällt.

Frage 66. Wie konstruiert man zu dreien gegebenen Strahlen oder Ebenen das vierte harmonische Element?

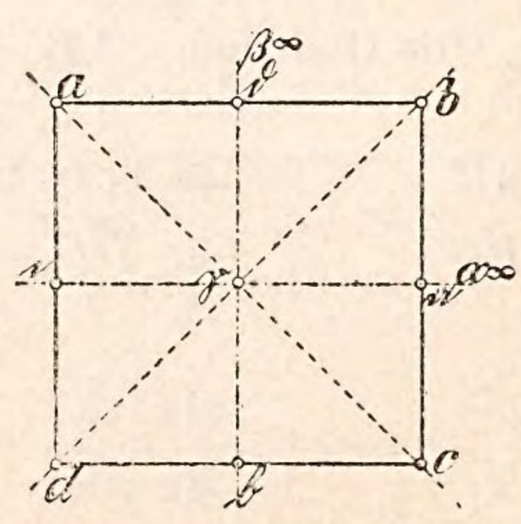
Antwort. Man schneide die Strahlen bezw. die Ebenen durch eine beliebige nicht durch den Mittelpunkt bezw. die Achse gehende Gerade, erhält hierdurch auf letzterer drei Punkte, zu welchen man, wie in Antwort der Frage 65, den vierten harmonischen Punkt konstruiert.

Durch ihn geht der vierte harmonische Strahl bezw. die vierte harmonische Ebene zu den gegebenen dreien Strahlen oder Ebenen.

Frage 67. Lässt sich mit Bezugnahme auf die Erkl. 115 die in Antwort der Frage 65 gelöste Aufgabe nicht noch in anderer Weise lösen?

Antwort. Denkt man sich in dem Quadrate $a\,b\,c\,d$, siehe Figur 117, die beiden Diagonalen ac und bd, sowie durch deren Schnittpunkt γ nach den Mittelpunkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ der

Figur 117.



Seiten $b\,c$ und $a\,b$ gezogen, so bilden zunächst die Diagonalen und die zuletzt genannten durch γ zu den Quadratseiten gezogenen Parallelen in Rücksicht auf die Erkl. 122 vier harmonische Strahlen, desgleichen

Erkl. 123. Die Figur $a'b'c'd'$, siehe Figur 118, kann in doppelter Weise aufgefasst werden, nämlich als ein einfaches Viereck, gebildet durch die Verbindung von vier Punkten, oder als ein einfaches Vierseit, gebildet durch den Schnitt von vier Geraden. Im ersten Falle ist ausser der Verbindung $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und $d'a'$ auch noch die Verbindung von $a'c'$ und $b'c'$ möglich, im zweiten Falle schneiden sich die vier Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und $d'a'$ ausser in den vier Punkten a, b', c', d' noch in zweien weiteren Punkten α' und β'.

Nimmt man die eben genannten Verbindungslinien bezw. Schnittpunkt als zur Figur gehörig an, so erhält man im ersten Falle ein vollständiges Viereck mit **vier Ecken** a', b', c', d' und sechs Seiten $a'b'$, $d'c'$, $a'd'$, $b'c'$, $a'c'$ und $b'c'$, im zweiten Falle ein vollständiges Vierseit mit vier Seiten $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$ und sechs Ecken a', c', b', d' und α', β'.

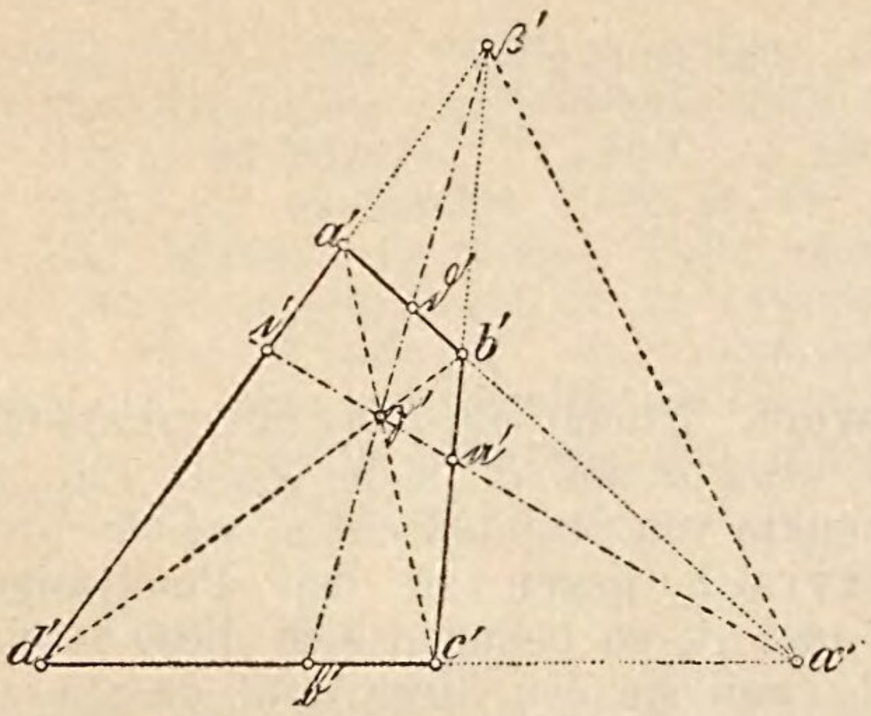
Erkl. 124. In einem vollständigen Viereck oder Vierseit unterscheidet man drei Paar Gegenseiten bezw. drei Paar Gegenecken; erstere sind die nicht auf einander folgenden Seiten $a'b'$ und $d'c'$, $a'd'$ und $b'c'$ und $a'c'$ und $b'c'$, sie schneiden sich in dreien Punkten α', β', γ', den Diagonalschnittpunkten. Die Verbindungslinien $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma'$ und $\beta'\gamma'$ der letzteren Punkte sind die Diagonalen des Vierecks.

„Ein vollständiges Viereck besitzt vier Ecken, sechs Seiten und drei Diagonalschnittpunkte."

Entsprechend erhält man im vollständigen Vierseit die Punkte a', c', ebenso b', d', endlich α', β' als Gegenecken deren Verbindungslinien $a'c'$, $b'd'$, $\alpha'\beta'$ die Diagonallinien des Vierseits ergeben:

„Ein vollständiges Vierseit besitzt vier Seiten, sechs Ecken und drei Diagonallinien."

Figur 118.



Erkl. 125. Das Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ heisst das Diagonalendreieck des vollständigen Vierecks, die drei Geraden $a'c'$, $b'd'$ und $\alpha'\beta'$ bilden das Diagonalendreiseit des vollständigen Dreiseits.

Wie viele einfache Vierecke, bezw. Vierseiten lassen sich aus einem vollständigen Viereck bezw. Vierseit herstellen?

Erkl. 126. In Rücksicht auf die eben vorausgegangenen Erklärungen 123—125 lässt das in Antwort der Frage 67 Entwickelte in folgenden Sätzen kleiden:

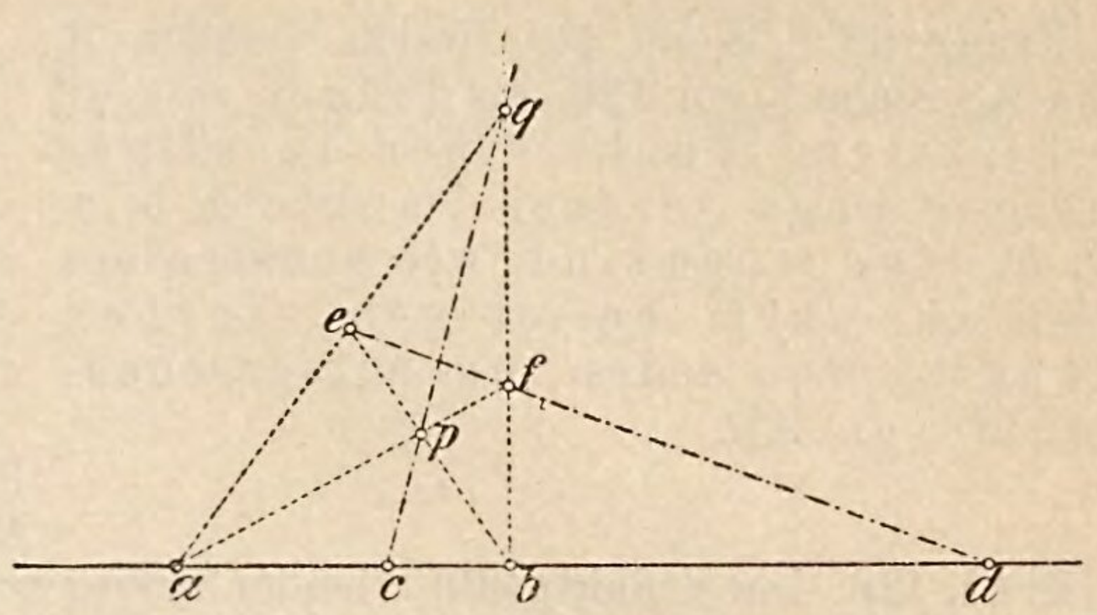
„In einem vollständigen Viereck bilden je zwei Ecken mit den auf ihrer Verbindungslinie liegenden Durchschnittspunkten der Diagonalen stets vier harmonische Punkte."

„In einem vollständigen Viereck bilden je zwei Seiten mit den durch ihren Schnittpunkt gehenden Diagonalen stets vier harmonische Strahlen."

Die gleichen Sätze haben auch für das vollständige Vierseit Gültigkeit.

auch die Endpunkte der Quadratseiten mit ihren Mittelpunkten und den unendlich fernen Punkten α und β je vier harmonische Punkte. Es sind somit in der Figur 117 die Punkte a, b, $\mathfrak{d}$, β, d, c, $\mathfrak{b}$, α, b, c, $\mathfrak{a}$, β, a, d, $\mathfrak{c}$, β je vier harmonische Punkte. Denkt man sich nun das Quadrat $abcd$ central in eine Ebene projiziert, so erhält man als Centralprojektion ein Viereck $a'b'c'd'$, siehe Figur 118, in welchen die gegenüberliegenden Seiten nicht mehr parallel sein werden, sondern sich in Punkten α', β' treffen. Da nun aber durch eine centrale Projektion die harmonische Teilung nicht geändert wird, siehe Erkl. 118, so sind auch die Punkte $a'b'\mathfrak{d}'\alpha'$, $d'c'\mathfrak{b}'\alpha'$, $b'c'\mathfrak{a}'\beta'$ und $a'd'\mathfrak{c}'\beta'$ je vier harmonische Punkte, desgleichen bilden die beiden Diagonalen im Verein mit den durch ihren Schnittpunkt nach

Figur 119.



den Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten gezogenen Verbindungslinien je vier harmonische Strahlen, siehe Erkl. 123.

Auf Grund des eben Gesagten und im Hinblick auf die Erkl. 123—126 gewinnt man folgende Konstruktion des vierten harmonischen Punktes d zu dreien gegeben Punkten a, b, c, siehe Figur 119. Man ziehe durch c eine beliebige Gerade, wähle auf ihr zwei Punkte p und q willkürlich, welch jeder mit a und b zu verbinden ist. Genannte Verbindung liefert die Punkte ef, deren Verbindungslinie den Punkt d als vierten harmonischen Punkt zu den Punkten a, b, c enthält, dabei sind a, b und c, d je ein conjugiertes Punktpaar.

Sind dagegen drei Strahlen qa, qp, qb gegeben, siehe Figur 119, zu welcher der vierte harmonische Strahl qd zu konstruieren ist, so ziehe die man Gerade ab ganz beliebig und verbinde deren Schnittpunkte a und b mit einem willkürlich auf qc ge-

Erkl. 127. Die in Antwort der Frage 67 angegebene Konstruktion des vierten harmonischen Punktes bezw. Strahles erfordert zu ihrer Ausführung lediglich den Gebrauch des Lineales ohne Anwendung des Zirkels; die Konstruktion ist, wie man sagt, eine lineare Konstruktion.

wählten Punkte p, wodurch sich auf qa und qb die Punkte e und f ergeben, deren Verbindungslinien auf ab einen Punkt d bestimmen, durch welchen der vierte harmonische Strahl qd zu den dreien gegebenen Strahlen qa, qb und qc hindurch geht, dabei sind qa und qb, ebenso qc und qd je ein conjugiertes Strahlenpaar.

I) Ueber die Konstruktion der projektiven Gebilde der ersten Stufe.

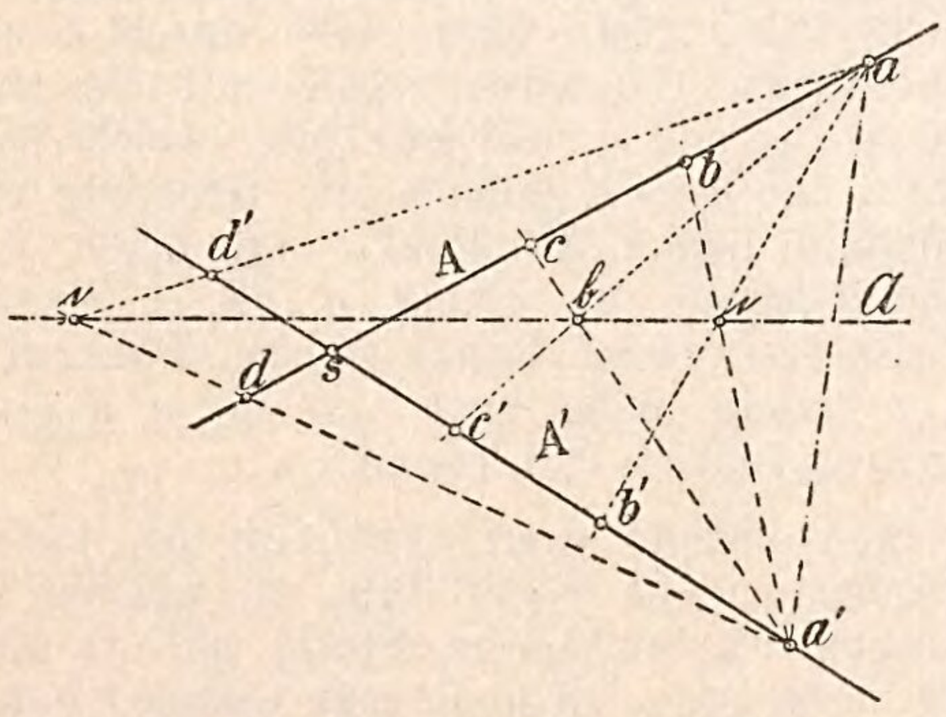
Anmerkung 15. Zufolge der Erkl. 88 ist die Projektivität zweier Gebilde lediglich durch die Doppelverhältnisgleichheit von je vier entsprechenden Elementen beider Gebilde bedingt. Kennt man demnach von den Gebilden je drei Elemente, so muss sich zu irgend einem vierten Gebilde des einen Elementes das entsprechende Element im anderen Gebilde derart konstruieren lassen, dass nur dies eine Element als entsprechendes angesehen werden kann. Im folgenden soll dies gezeigt werden.

Frage 68. Wenn auf zweien Geraden A und A', siehe Figur 120, als Träger zweier projektiven Punktreihen in allgemeiner Lage je drei Punkte a, b, c, a', b', c' gegeben sind, wie konstruiert man zu einem beliebigen vierten Punkte d von A den ihm entsprechenden d' von A'?

Erkl. 128. Der Schnittpunkt s beider Träger ist ein Punkt, welcher beiden Punktreihen zugleich angehört. Fasst man ihn auf als Punkt s der Punktreihe auf A, so entspricht ihm auf A' ein Punkt s'; fasst man den Punkt s auf als einen Punkt der Punktreihe auf A' etwa t' (in der Figur 120 nicht bezeichnet), so entspricht ihm auf A ein Punkt t.

Man konstruiere mittels des in Antwort der Frage 68 angegebenen Verfahrens die Punkte s' und t.

Figur 120.



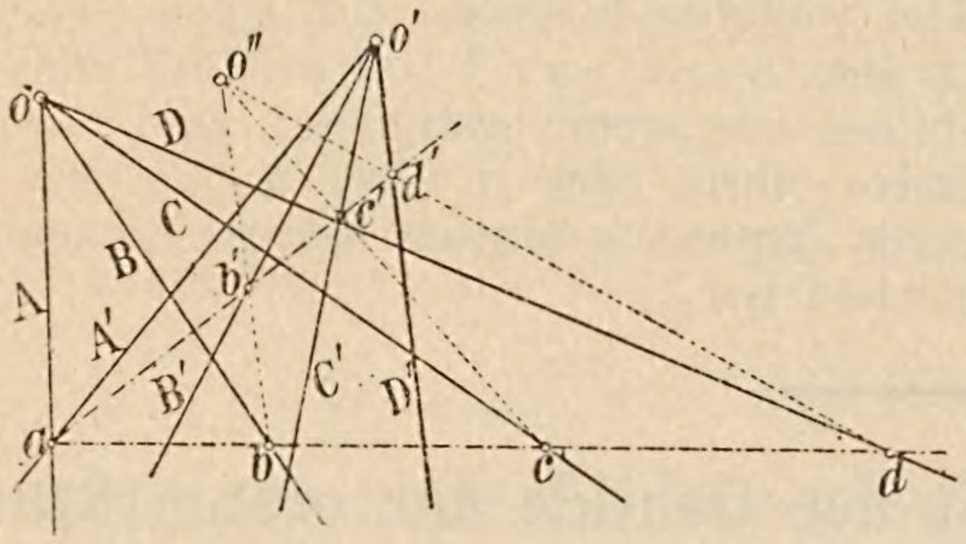
Antwort. Nimmt ein Paar entsprechender Punkte, etwa a und a', siehe Figur 120, als Mittelpunkte von Strahlbüscheln, welche perspektivisch liegen zu den Punktreihen auf A' und A, so befinden sich diese Strahlbüschel, weil sie den Strahl aa' gemeinsam haben, siehe Erkl. 104 a, selbst in perspektivischer Lage und besitzen somit in der Verbindungslinie $\mathfrak{A}$, der Schnittpunkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$... entsprechender Strahlen ab' und $a'b$, ac' und $a'c$ eine perspektivische Achse, welch letztere von dem Strahle $a'd$ in einem Punkt $\mathfrak{d}$ getroffen wird, dem im anderen Strahlbüschel der Strahl ad entspricht, welcher auf dem Träger A' den dem Punkte d der Punktreihe auf A entsprechenden Punkt d' der Punktreihe auf A' liefert.

Der Schnittpunkt von ad' mit $\mathfrak{A}$ ist in der Figur 120 irrtümlich mit $\mathfrak{c}$ statt mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet.

(Die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind vertauscht; dahin wo $\mathfrak{c}$ steht gehört $\mathfrak{b}$ und umgekehrt.

Frage 69. Wenn von zweien projektiven Strahlbüscheln o (A, B, C . . .) und o' (A', B', C' . . .), siehe Figur 121, in allgemeiner Lage je drei entsprechende Strahlen gegeben sind, wie konstruiert man zu einem beliebigen vierten Strahle D des einen Büschels den entsprechenden Strahl D' im anderen Büschel?

Figur 121.



Erkl. 129. Die Verbindungslinie $o\,o'$ der Mittelpunkte beider Strahlbüschel kann sowohl als Strahl im Büschel o ($A\,B\,C$ . . .) als auch als Strahl Q' im Büschel o' (A', B', C' . . .) angesehen werden; im ersten Falle entspricht dem Strahle P ein Strahl P', im zweiten Falle gehört zum Strahle Q' ein entsprechender Strahl Q. Man konstruiere die Strahlen P' und Q unter Zugrundelegung der Angaben in Antwort der Frage 69.

Frage 70. Wenn von einer Punktreihe und einem zu dieser projektiven Strahlbüschel je drei Elemente gegeben sind, wie erhält man zu irgend einem vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende Element im anderen Gebilde?

Antwort. Zeichnet man durch den Schnittpunkt a zweier entsprechenden Strahlen beider Büschel, etwa A und A' zwei beliebige Gerade, so entstehen auf denselben durch die beiden Strahlbüschel zwei projektive Punktreihen a, b, c . . . und a', b', c', welche, da sie ein Paar entsprechende Punkte a und a' gemeinsam haben, perspektivisch liegen, siehe Erkl. 94, und demgemäss die Verbindungslinien b, b', c, c' entsprechender Punkte durch einen festen Punkt o'' hindurchgehen. Der Strahl D des Büschels o (A, B, C . . .) liefert nun auf der Punktreihe a, b, c . . . den Punkt d, dem in der Punktreihe a', b', c' . . . mittels des Strahles $o''d$ der Punkt d' als entsprechender Punkt zugewiesen ist. Durch d' geht somit auch der dem Strahle D entsprechende Strahl D'.

Auflösung. Man schneidet entweder das gegebene Strahlbüschel durch eine Gerade oder man verbindet die Punktreihe durch einen beliebig ausserhalb des Trägers derselben gewählten Punkt o' zu einem Strahlbüschel und löst im ersten Fall die Aufgabe wie in Antwort der Frage 68, im zweiten Fall wie in Antwort der Frage 69.

Anmerkung 16. Ist ein Ebenenbüschel mit einer Punktreihe, einem Strahlbüschel oder einem zweiten Ebenenbüschel in projektive Beziehung zu bringen, so kann man, sobald drei Elemente in jedem der Gebilde gegeben sind, zu einem beliebigen vierten Elemente des einen Gebildes das entsprechende im anderen Gebilde konstruieren und zwar in gleicher Weise wie in den Antworten der Fragen 68 und 69. Man braucht ja nur das Ebenenbüschel durch eine Gerade nach einer Punktreihe oder durch eine die Achse des Büschels nicht enthaltende Ebene nach einem Strahlbüschel zu schneiden und wie in den Antworten der Fragen 68 und 69 zu verfahren.

Frage 71. Welches Grundgesetz bezüglich der Projektivität zweier Grundgebilde der ersten Stufe, siehe Erkl. 111, ist in den Antworten der Fragen 68 und 69 enthalten.

Antwort. Aus den in den Antworten der Fragen 68 und 69 kennen gelernten Konstruktionen geht hervor, dass die Projektivität zweier Grundgebilde der ersten Stufe bestimmt und festgelegt ist, sobald man dreien Elementen des einen Gebildes drei Elemente des anderen Gebildes entsprechen lässt. Es gibt dann zu jedem weiteren Elemente des einen Gebildes ein aber auch nur Element des anderen Gebildes von ganz bestimmter Lage, welch letztere durch die in den Antworten der Fragen kennen gelernten Konstruktionen zu ermitteln ist.

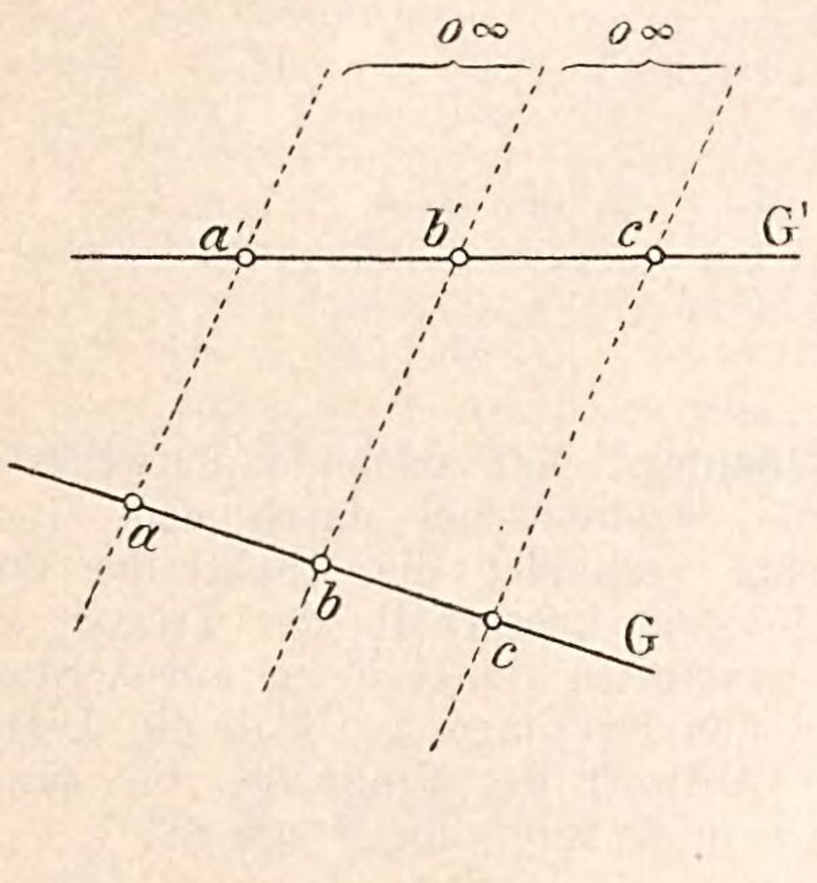
K) Besondere Fälle der Projektivität der Gebilde der ersten Stufe.

Frage 72. Welche besondere Lagen können ausser den bisher kennen gelernten Fällen zwei projektive Punktreihen zu einander einnehmen?

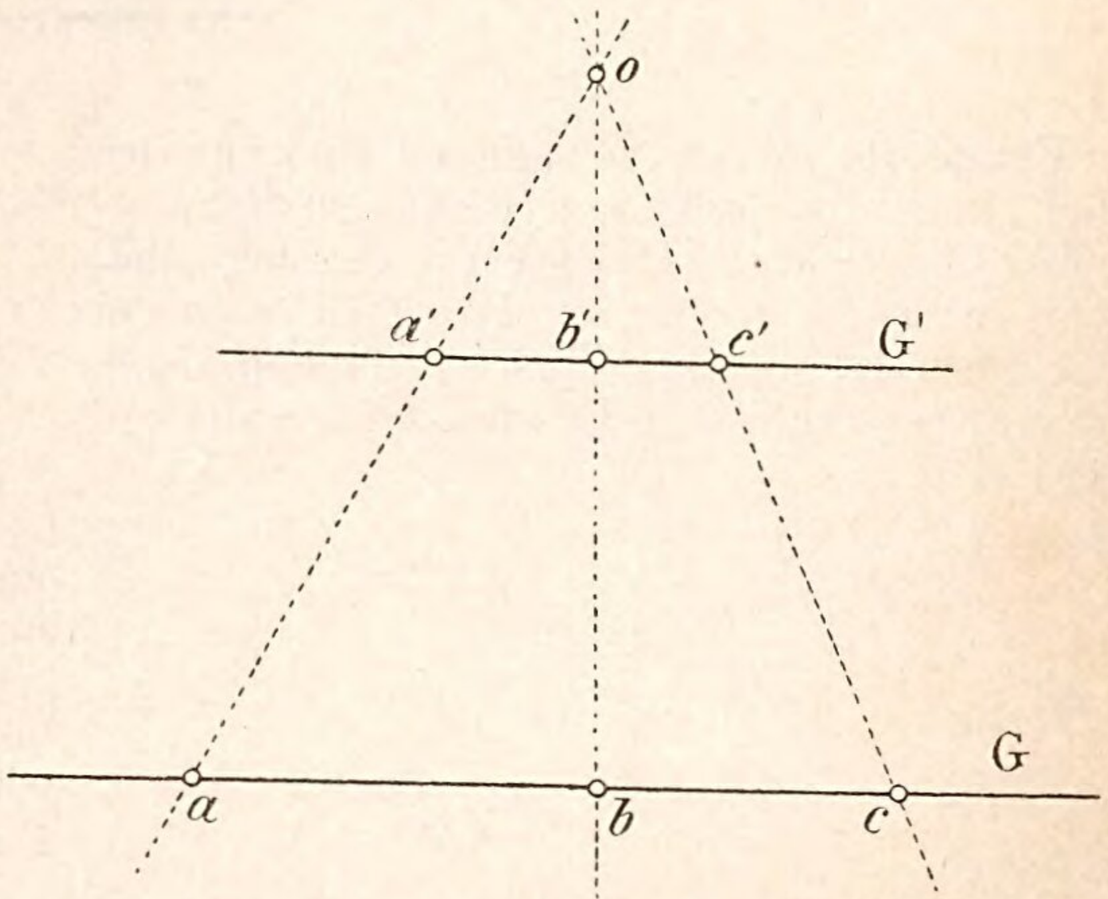
Antwort. Zwei projektive Punktreihen können

a) in perspektivischer Lage sich befinden, und zwar so, dass entweder das **Pr. C.** oder aber der Schnittpunkt der Träger beider Punktreihen in unendliche Ferne fällt, siehe Figur 122 und 123, in beiden Fällen heissen die projektiven Punktreihen ähnlich.

Figur 122.



Figur 123.



Sind a, b, c, d, a', b', c', d' vier entsprechende Punkte beider Punktreihen, so finden in beiden Fällen zwischen entsprechenden Strecken die Beziehungen statt

$$\overline{ab} : \overline{bc} : \overline{cd} \ldots = \overline{a'b'} : \overline{b'c'} : \overline{c'd'} \ldots . \quad 58)$$

Erkl. 130. In projektiven ähnlichen Punktreihen sind stets die unendlich fernen Punkte beider Punktreihen ein entsprechendes Punktpaar und umgekehrt sind zwei Punktreihen stets ähnlich sobald ihre unendlich fernen Punkte entsprechende Punkte sind, denn heissen

q und r' die unendlich fernen Punkte der Träger, so findet im Falle der Projektivität die Beziehung statt:

$$(ab, cq) = (a'b', c'r') \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

oder

$$\frac{\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}}{\frac{\overline{aq}}{\overline{bq}}} = \frac{\frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}}}{\frac{\overline{a'r'}}{\overline{b'r'}}}$$

Nun ist aber

$$\frac{\overline{aq}}{\overline{bq}} = \frac{\overline{a'r'}}{\overline{b'r'}},$$

daher auch

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{a'c'}}{\overline{b'c'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

und folglich sind in Rücksicht auf Gleichung 58 die Punktreihen ähnlich.

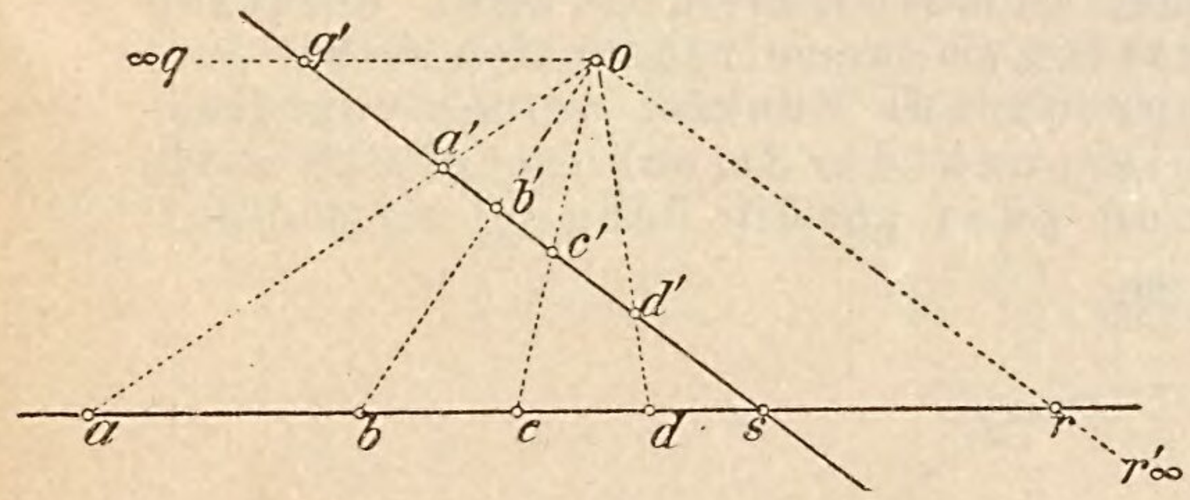
d. h. zwischen den entsprechenden Strecken, begrenzt durch entsprechende Punkte beider Punktreihen, findet stets Verhältnisgleichheit statt.

Sind insbeondere sämtliche entsprechende Strecken einander gleich, so heissen die Punktreihen projektivisch gleich. Dieser Fall tritt ein, wenn bei geneigter Lage der Träger, die Verbindungslinien entsprechender Punkte zur Halbierlinie des Winkels der Träger senkrecht stehen, oder bei paralleler Lage der Träger, wenn das **Pr. C.** von beiden Trägern gleichweit absteht.

b) insofern eine besondere Lage haben, als die beiden Träger zusammenfallen, so dass die Punktreihen auf ein und derselben Geraden sich befinden. Man nennt sie in diesem Falle zwei projektive Punktreihen mit gemeinsamem Träger oder zwei aufeinanderliegende Punktreihen.

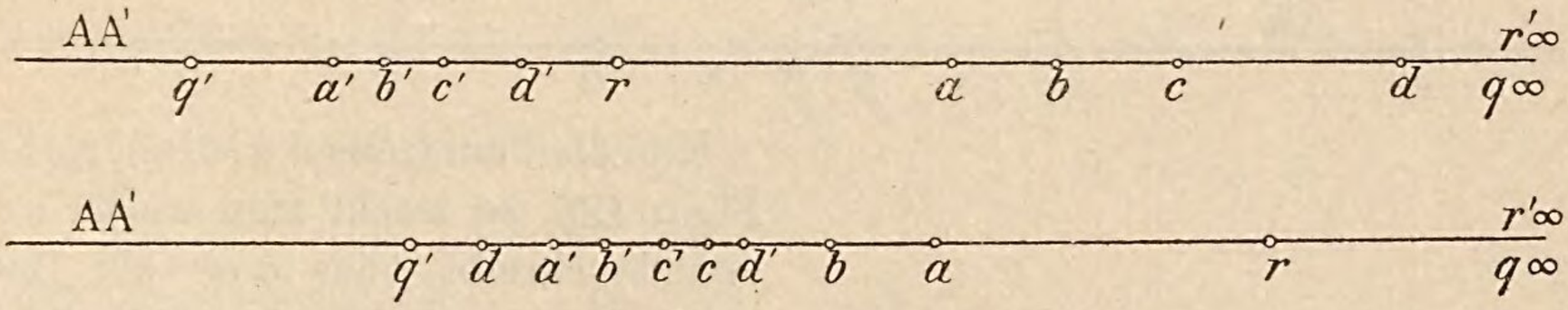
Frage 73. Wie kann man sich zwei projektive Punktreihen mit gemeinsamem Träger entstanden denken?

Figur 124.



Antwort. Denkt man sich die Träger der beiden Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $a', b', c' \ldots$, siehe Figur **124**, mit den letzteren aufeinander gelegt, so kann dies in zweifacher Weise vorgenommen werden, nämlich so wie in Figur **124**a oder so wie in Figur **124**b. In beiden Fällen werden die Punkte r und q' verschiedene Lagen auf dem Träger AA' einnehmen, im ersten Fall ist aber die Bewegungsrichtung, in welcher man von einem Punkte a zum nächstfolgenden Punkte b gelangt für entsprechende Punkte in beiden Punktreihen die gleiche, im zweiten Fall ist sie eine entgegengesetzte. Man nennt die Punktreihen im ersten Fall gleichlaufend, siehe Figur **124**a, im zweiten Fall ungleichlaufend, siehe Figur **124**b.

Figur 124 b.



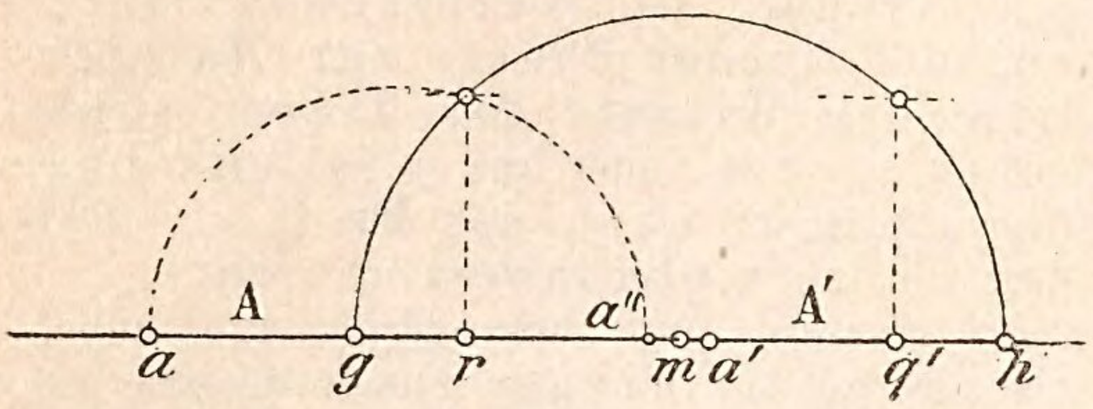
Erkl. 131. Bei zweien projektiven Punktreihen mit gemeinsamem Träger kann jeder Punkt, z. B. p, des Trägers doppelt aufgefasst werden, nämlich einmal als Punkt der ersten Reihe, dann entspricht ihm ein bestimmter Punkt p' des Trägers als Punkt der zweiten Reihe; in gleicher Weise entspricht dem Punkt p als Punkt t' der zweiten Reihe genommen ein ganz bestimmter Punkt t der ersten Reihe und es werden im allgemeinen die Punkte p' und t auf dem Träger nicht zusammenfallen.

Vorstehendes lässt sich in folgendem Satze zusammenfassen:

„Zwei projektive Punktreihen auf einem gemeinsamen Träger können gleichlaufend oder ungleichlaufend sein. Im ersten Fall ist die Bewegungsrichtung von aufeinander folgenden entsprechenden Punkten in beiden Punktreihen die gleiche, im zweiten Fall die entgegengesetzte."

Frage 74. Gibt es auf dem gemeinsamen Träger zweier projektiven Punktreihen auch solche Punkte, in welchen entsprechende Punkte beider Punktreihen zusammenfallen und wenn ja, wie konstruiert man dieselben?

Figur 125.



Erkl. 132. Elemente, welche zweien projektivischen Gebilden als entsprechende Elemente zugleich angehören, heissen Doppelelemente dieser Gebilde. Die in der Antwort der Frage genannten, beiden Punktreihen angehörigen Punkte heissen somit Doppelpunkte beider Reihen. Man kann die in der eben genannten Antwort ausgesprochenen Sätze daher auch so ausdrücken:

„Zwei projektive Punktreihen mit gemeinsamem Träger besitzen stets zwei Doppelpunkte, wenn sie ungleichlaufend sind, dagegen zwei Doppelpunkte einen oder keinen Doppelpunkt, wenn die Punktreihen gleichlaufend sind und zwar je nachdem $k \lessgtr \frac{1}{2} \overline{r\,q'}$ ist."

Antwort. Sind r und q' die Gegenpunkte, a und a' entsprechende Punkte, siehe Figur 125, so sind die Punktreihen ungleichlaufend. Ist nun im Punkte g ein Paar entsprechender Punkte beider Punktreihen vereinigt, so muss die Beziehung bestehen $\overline{g\,r} \cdot \overline{g\,q'} = \overline{a\,r} \cdot \overline{a'\,q'}$, siehe Gleichung 14.

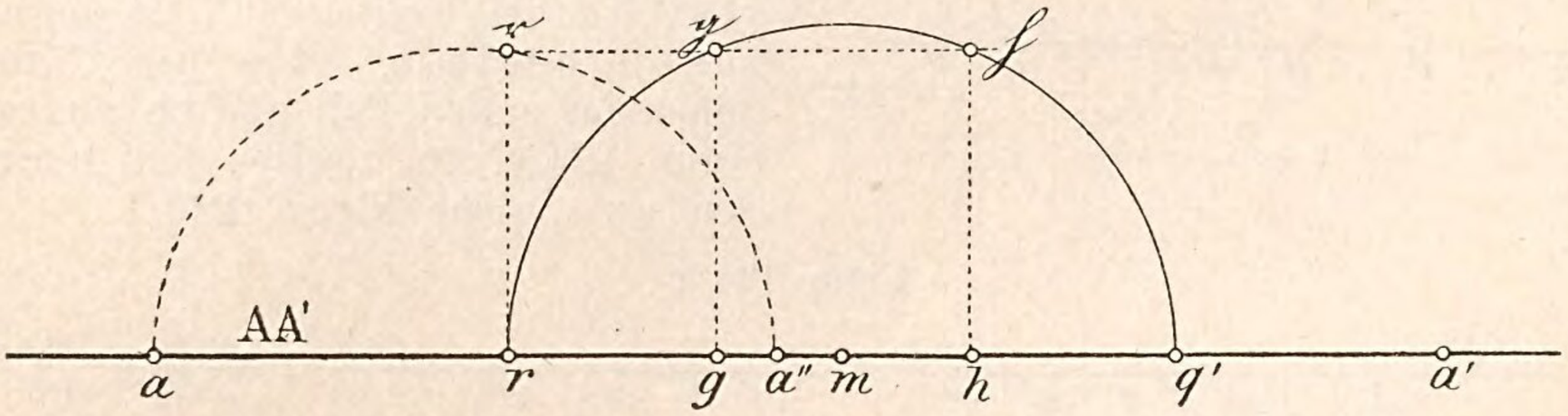
Macht man daher, siehe Figur 125, $\overline{r\,a''} = \overline{a'\,q'}$ und beschreibt über $\overline{a\,a''}$ als Durchmesser einen Halbkreis, so ist die zu $a\,a''$ senkrechte und durch r gehende halbe Kreissehne gleich k. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt m der Strecke $\overline{r\,q'}$ und gehend durch den zweiten Endpunkt der eben genannten halben Kreissehne liefert auf A bezw. A' zwei Punkte g und h, welch jeder beiden Punktreihen als ein Paar entsprechender Punkte zugleich angehört, denn es ist

$$\overline{r\,g} \cdot \overline{q'\,g} = \overline{r\,h} \cdot \overline{q'\,h} = \overline{a\,r} \cdot \overline{a'\,q'} = k^2 \ldots 61)$$

Der Kreis über $\overline{a\,a''}$ als Durchmesser ist stets vorhanden, welche Lage die Punkte a und a' auch haben mögen. Es gibt somit stets zwei Punkte g und h, in welchen je ein Paar entsprechender Punkte beider Punktreihen vereinigt sind, was als Satz wie folgt ausgedrückt werden kann:

„Zwei ungleichlaufende Punktreihen mit gemeinsamem Träger besitzen stets zwei gemeinsame sich selbst entsprechende Punkte, welche vom Halbierpunkt der Strecke $r\,q'$ gleich weit, und zwar um die Länge k abstehen."

Figur 126.



Sind die Punktreihen gleichlaufend, siehe Figur 126, so macht man wieder $r\,a'' = q'\,a'$ und beschreibt über $\overline{a\,a''}$ als Durchmesser einen Kreis, d. h. man konstruiert die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Strecken $\overline{a\,r}$ und $\overline{a''\,r}$ und sucht in dem über $\overline{r\,q'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise die zu dieser mittleren Proportionale gleich grosse halbe zu $r\,q'$ senkrechte Kreissehne; ihr Schnittpunkt mit $r\,q'$ ist ein beiden Punktreihen angehöriger sich selbst entsprechender Punkt. Da es im allgemeinen zwei solcher Kreissehnen gibt, so sind auch zwei beiden Punktreihen angehörige sich selbst entsprechende

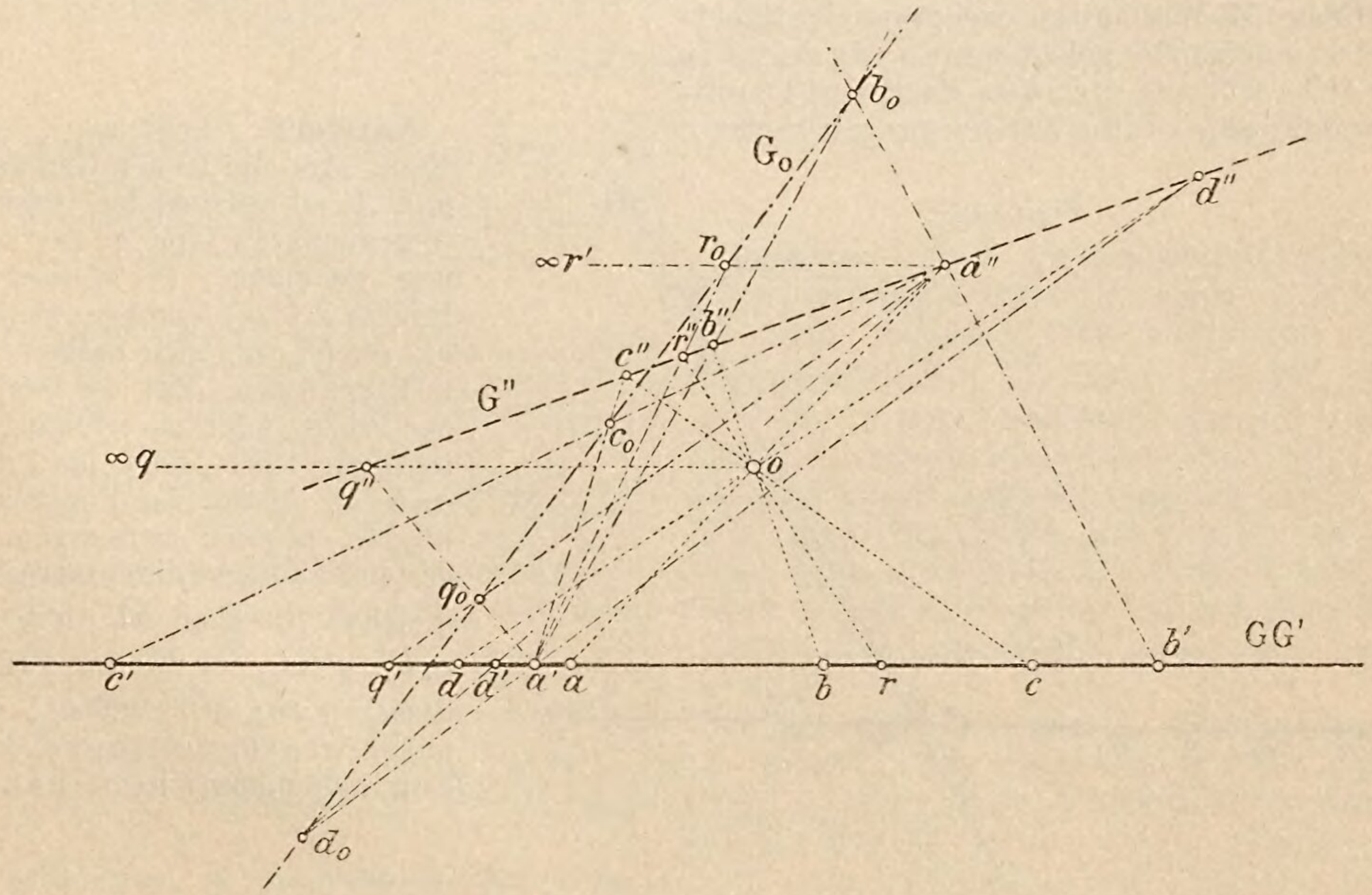
Punkte g und h vorhanden. Doch ist dies nicht immer der Fall, sondern nur solange als die Länge k, das ist die Länge $\overline{rr} = \overline{\mathfrak{g}g} = \overline{\mathfrak{h}h}$, siehe Figur 126, kleiner ist als $\frac{1}{2}\overline{rq'}$. Ist die Strecke $\overline{rr} = \frac{1}{2}\overline{rq'}$, so gibt es nur einen beiden Punktreihen angehörigen sich selbst entsprechenden Punkt. Es gilt somit folgender Satz:

„Zwei gleichlaufende projektive Punktreihen mit gemeinsamem Träger besitzen nur solange ein Paar beiden Punktreihen gemeinsame sich selbst entsprechende Punkte, solange die Wurzel aus der projektivischen Potenz kleiner ist als die halbe Entfernung der beiden Gegenpunkte r und q'. Ist k gleich $\frac{1}{2}rq'$, so besitzen die Punktreihen nur einen gemeinsamen Punkt, ist $k > \frac{1}{2}rq'$, so sind keine gemeinsamen Punkte vorhanden.

Frage 75. Wenn zwei projektive Punktreihen mit gemeinsamem Träger je durch drei Punkte gegeben sind, wie konstruiert man zu einem beliebigen vierten Punkte d der einen Reihe den entsprechenden Punkt d' der anderen Reihe?

Antwort. Nimmt man eine beliebige Gerade G'' an und projiziert auf dieselbe von einem beliebigen Punkte o aus die Punktreihe a, b, c nach a'', b'', c'' . . ., so kann man, wie in Antwort der Frage 68 zu jedem Punkte d der Punktreihe a, b, c den ihm entsprechenden Punkt d'' auf G'' konstruieren,

Figur 127.



der Strahl $o\,d''$ liefert dann den dem Punkte d entsprechenden Punkt d'.

Zieht man insbesondere durch o nach dem unendlich fernen Punkt q der Reihe $a, b, c \ldots$, so entspricht ihm auf G'' der Punkt q'', letzterem auf G_0 der Punkt q_0 und diesem auf G der Punkt q.

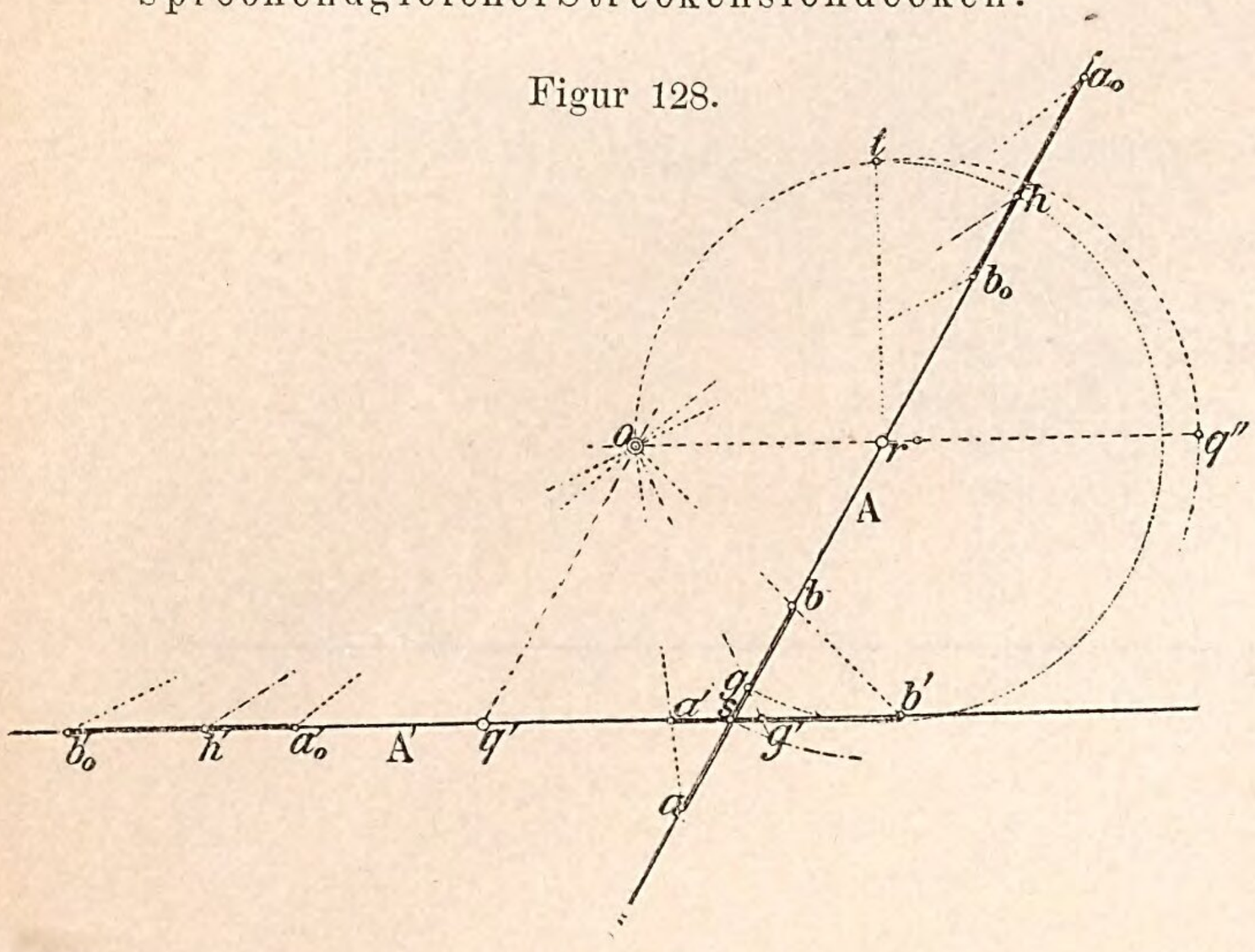
In gleicher Weise ergibt sich durch die Parallele durch a'' zu G' auf G_0 der Punkt r_0, dem auf G'' der Punkt r'' und letzterem wieder auf G der Punkt r entspricht.

Frage 76. Kann es unter Umständen auch vorkommen, dass die Punkte zweier aufeinander liegenden Punktreihen sich in besonderer Weise entsprechen?

Antwort. Wie schon in Erkl. 131 gesagt wurde, lässt sich jeder Punkt des gemeinsamen Trägers zweier projektiven Punktreihen doppelt auffassen. Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt p der einen Reihe heraus, so entspricht ihm in der anderen Reihe ein Punkt p'. Nimmt man aber den Punkt p als zur zweiten Reihe gehörig an und nennt ihn für diesen Fall t', so entspricht ihm ein Punkt t, der im allgemeinen mit dem Punkte p' nicht zusammenfallen wird. Im besonderen kann aber der Fall eintreten, dass der Punkt t mit dem Punkte p' zusammenfällt. Es ist dies offenbar stets der Fall, wenn man zwei projektive Punktreihen so aufeinander legt, dass entsprechend gleiche Strecken mit ihren nicht entsprechenden Endpunkten zusammenfallen.

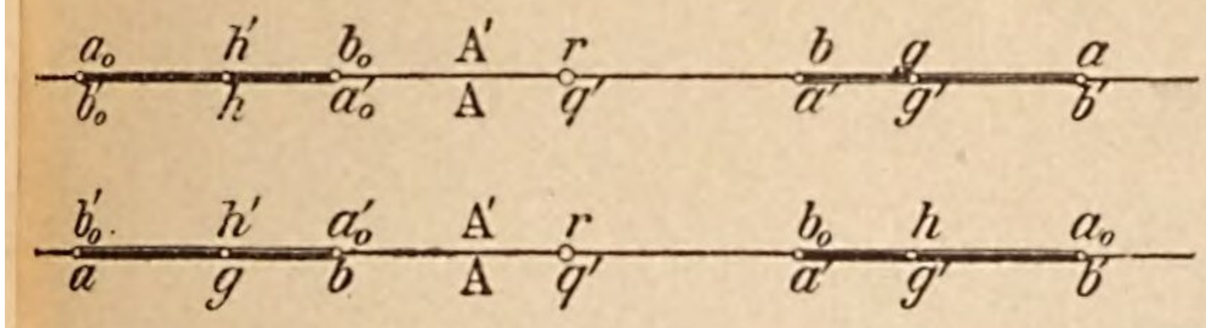
Frage 77. Wie müssen zwei projektive Punktreihen aufeinander gelegt werden, damit die nicht entsprechenden Endpunkte entsprechend gleicher Strecken sich decken?

Figur 128.



Antwort. Legt man, siehe Figur 128, die beiden Geraden A und A' so aufeinander, dass die Gegenpunkte r und q' zur Deckung gelangen, so können die Punkte a, b, a_0, b_0 mit den Punkten b', a', b'_0, a'_0 sich decken, wie in Figur 129 a, oder die Deckung der Punkte kann so erfolgen, wie in Figur 129 b, wenn die Punkte a, b, a_0, b_0 mit den Punkten b'_0, a'_0, b', a' sich vereinigen. Im ersten Fall liegen die entsprechend gleichen Strecken $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ und $\overline{a_0 b_0}$, $\overline{a'_0 b'_0}$, im zweiten Fall die Strecken $\overline{a\,b_0}$, $\overline{a'b'_0}$ und $\overline{a_0\,b}$, $\overline{a'_0 b'}$ mit ihren nichtentsprechenden Endpunkten übereinander.

Figur 129 a.



Figur 129b.

Erkl. 133. Zwei Punktreihen, welche in der in Antw. der Frage 77 gekennzeichneten Weise auf einem gemeinsamen Träger sich befinden, bilden ein Punktsystem oder auch eine Punkt-Involution bezw. eine Involution von Punkten oder auch eine involutorische Punktreihe oder endlich ein involutorisches gerades Gebilde.

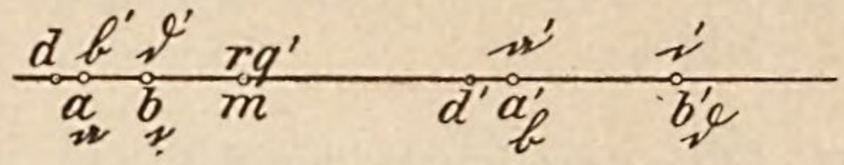
Erkl. 134. Das Wort „Involution“ stammt aus dem Lateinischen involutio, d. h. eine Verbindung in bestimmter Weise.

Erkl. 135. Die nicht entsprechenden Endpunkte entsprechend gleicher Strecken bilden je ein zusammengehöriges oder conjugiertes Punktpaar der Involution und man bezeichnet solche zusammengehörige Punkte mit dem gleichen Buchstaben und versieht zweckmässig den einen Endpunkt mit einem Index, z. B. a und a', b und b', c und c' etc., siehe Figur 130.

Erkl. 136. Der Punkt r q', welchen in beiden Punktreihen je der unendlich ferne Punkt r' bezw. q entspricht, heisst der Mittelpunkt oder Centralpunkt oder auch der Hauptpunkt der Involution.

Im ersten Fall decken sich ausserdem die entsprechenden Nullstrecken g und g', ebenso h und h', im zweiten Fall liegen die nicht entsprechenden Nullstrecken g und h', ebenso g' und h übereinander.

Figur 130.



Frage 78. Wie viele conjugierte Punktpaare einer Involution müssen zur Bestimmung aller übrigen Punktpaare derselben gegeben sein?

Erkl. 137. Da die Involution nur einen speciellen Fall zweier übereinanderliegenden projektiven Punktreihen darstellt, so folgt hieraus unmittelbar, dass es eine ungleichlaufende und eine gleichlaufende Involution von Punkten gibt, im ersten Fall decken sich die entsprechenden Nullstrecken und bilden die Doppelpunkte der Involution, im zweiten Fall sind Doppelpunkte nicht vorhanden, vielmehr decken sich in diesem Fall die nicht entsprechenden Nullstrecken und bilden ein vom Mittelpunkte der Involution gleich weit abstehendes d. h. zu diesem Punkte symmetrisches Punktpaar der Involution.

Antwort. Zufolge der Antwort der Frage 77 bilden die Punkte a und a', ebenso b und b' die nicht entsprechenden Endpunkte entsprechend gleicher Strecken, z. B. $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$, $\overline{cd'}$ und $\overline{c'd}$, siehe Figur 130. Es sind somit durch die beiden Punktpaare a und a', b und b' von den beiden übereinander befindlichen Punktreihen je vier Punkte a, b, c, d und a', b', c', d' gegeben, wodurch die Projektivität beider Punktreihen vollständig festgelegt ist, siehe Erkl. 88.

Aus vorstehender Entwickelung folgt aber der Satz:

„Eine involutorische Punktreihe ist vollständig gegeben, sobald man zwei conjugierte Punktpaare derselben kennt.“

Erkl. 138. Wendet man das in Antw. der Frage 52 Gesagte auf die Punktpaare einer Involution an, so erhält man, die im Mittelpunkte zusammenfallenden Gegenpunkte $r \,.\, q'$ mit m bezeichnet, die Beziehung:

$$\overline{m\,.\,a}\,.\,\overline{ma'} = \overline{mb}\,.\,\overline{mb'} = \overline{mc}\,.\,\overline{mc'}\,\ldots = k^2 = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

Für den Fall des Vorhandenseins von Doppelpunkten g und h, siehe Erkl. 137, geht obige Gleichung über in

$$\overline{ma}\,.\,\overline{ma'} = \overline{mb}\,.\,\overline{mb'} = \overline{mc}\,.\,\overline{mc'}\,\ldots = \overline{mg}\,.\,\overline{mg'} = \overline{mg^2} = \overline{m\,.\,h}\,.\,\overline{mh'} = \overline{mh^2}\,\ldots = k^2\,\ldots \quad 62)$$

Besitzt die Involution keine Doppelpunkte, so erhält man die Gleichung:

$$\overline{ma}\,.\,\overline{ma'} = \overline{mb}\,.\,\overline{mb'} = \overline{mc}\,.\,\overline{mc'} = \overline{mg}\,.\,\overline{mh} = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

Aus Gleichung 62 ist, in Rücksicht auf die Beziehung, zu ersehen, dass die Doppelpunkte gg' und hh' mit jedem Punktpaare einer Involution stets vier harmonische Punkte bilden.

Erkl. 139. Der Inhalt der Erkl. 138 lässt sich in folgende Sätze zusammenfassen:

„Eine ungleichlaufende Involution von Punkten besitzt stets zwei Doppelpunkte g und h, welche gleich weit vom Mittelpunkte der Involution und zwar um die Strecke k abstehen und die sämtlichen durch die Punktpaare der Involution gebildeten Strecken harmonisch trennen."

„Eine gleichlaufende Involution besitzt keine Doppelpunkte, dagegen ein zum Mittelpunkte der Involution symmetrisch liegendes Punktpaar, dessen Punkte um die Strecke k vom Mittelpunkte abstehen."

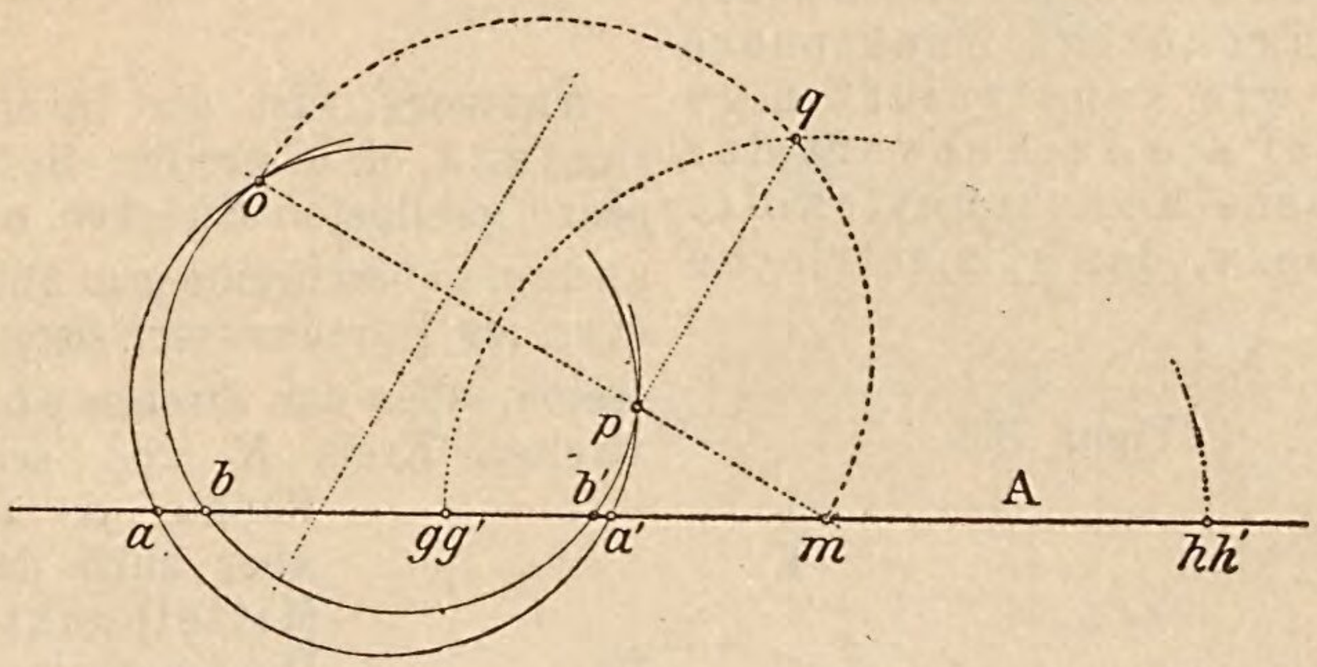
Erkl. 140. Eine Involution mit Doppelpunkten bezeichnet man auch als hyperbolische Involution, im Gegensatz zu einer Involution ohne Doppelpunkte, welche eine elliptische Involution genannt wird. Der Grund dieser letzteren Bezeichnungen soll später erläutert werden.

Frage 79. Wie konstruiert man auf Grund des bisher Angeführten auf einem gegebenen Träger beliebig viele Punktpaare einer Involution?

Antwort. Ist A, siehe Figur 131, der gegebene Träger, so wähle man zwei Punkte o und p ganz willkürlich und lege durch dieselben alle möglichen Kreise, so schneidet jeder Kreis auf A ein zusammengehöriges Punktpaar der Involution aus; denn trifft die Verbindungslinie op den Träger der Involution in einem Punkte m, so findet nach

einem bekannten planimetrischen Satze die Beziehung statt: $\overline{mo} \cdot \overline{mp} = \overline{ma} \cdot \overline{ma'} = \overline{mb} \cdot \overline{mb'} = \overline{mc} \cdot \overline{mc'}$. Es bilden somit in Rücksicht auf Gleichung 62 bezw. 63 die Punkte aa', bb', cc' zusammengehörige Punktpaare einer Involution, mit dem Punkte m als Mittelpunkt.

Figur 131.



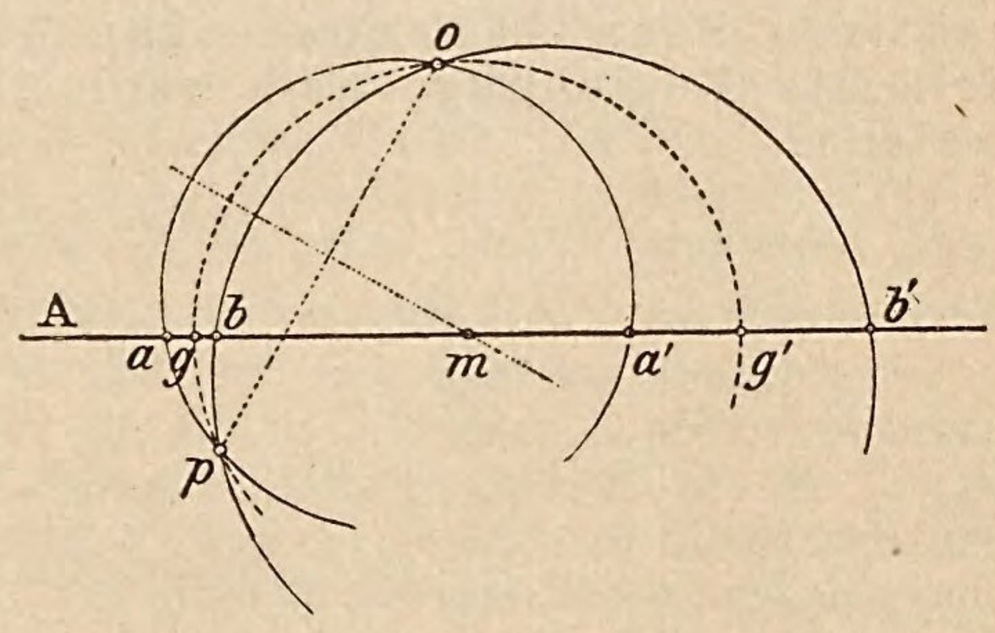
Erkl. 141. Liegen die Punkte o und p auf der nämlichen Seite von A (siehe Fig. 131), so gibt es unter den durch o und p möglichen Kreisen zwei, welche den Träger berühren, und es fallen in diesen Punkten die Punkte eines Punktpaares zusammen, d. h. die Berührpunkte dieser Kreise mit A liefern die Doppelpunkte gg' und hh' der Involution; ihre Entfernung von m ist in der Länge der Tangente von m an einen der Kreise K gegeben.

Erkl. 141 a. Die Länge $\overline{mq} = \overline{mg} = \overline{mh}$ ergibt sich auf Grund eines bekannten planimetrischen Satzes als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\overline{mo}$ als Hyptenuse und dem Punkte p als Fusspunkt der zur letzteren Linie gehörigen Höhe.

Erkl. 142. Die Gesamtheit aller Kreise, welche in einer Ebene durch zwei feste Punkte gelegt werden können, nennt man eine Kreisschar oder eine Schar von Kreisen. Mit Bezug auf die oben gegebene Erläuterung und in Rücksicht auf die Antw. der Frage 79 kann man den Satz aussprechen:

„Eine Kreisschar wird von einer Geraden in Punkten einer Involution geschnitten."

Figur 132.

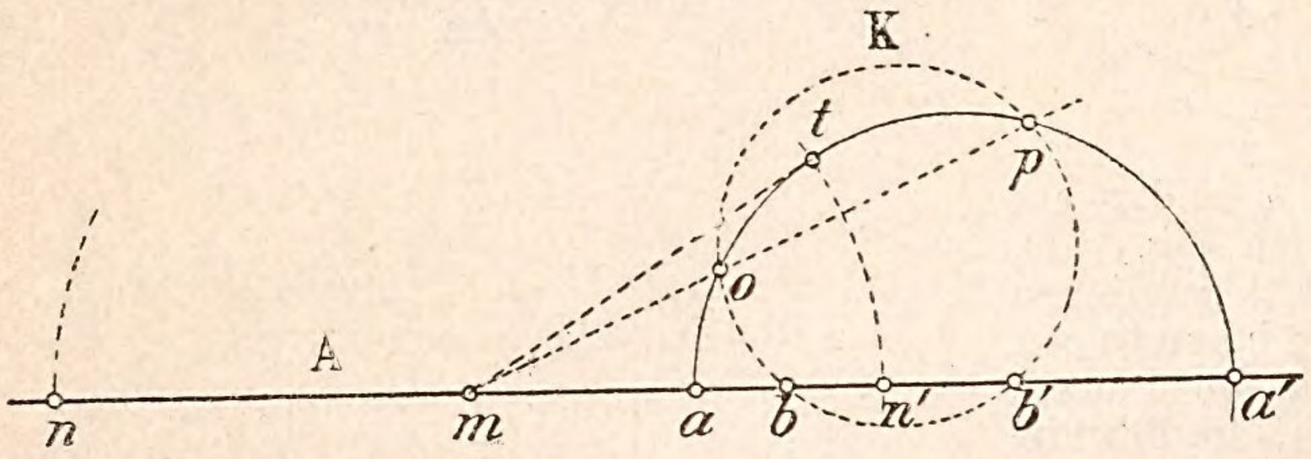


Erkl. 143. Liegen die Punkte o und p auf verschiedenen Seiten von A, siehe Fig. 132, so fällt der Punkt m innerhalb der Kreise der Kreisschar; es gibt keine Tangente von m aus an diese Kreise und unter den letzteren keine den Träger A berührenden Kreise, d. h. keine Doppelpunkte. Unter den Kreisen der Schar befindet sich aber einer, dessen Mittelpunkt auf A selbst liegt und der den Träger A in den Punkten g und g' des zum Mittelpunkte m symmetrischen Punktpaares schneidet.

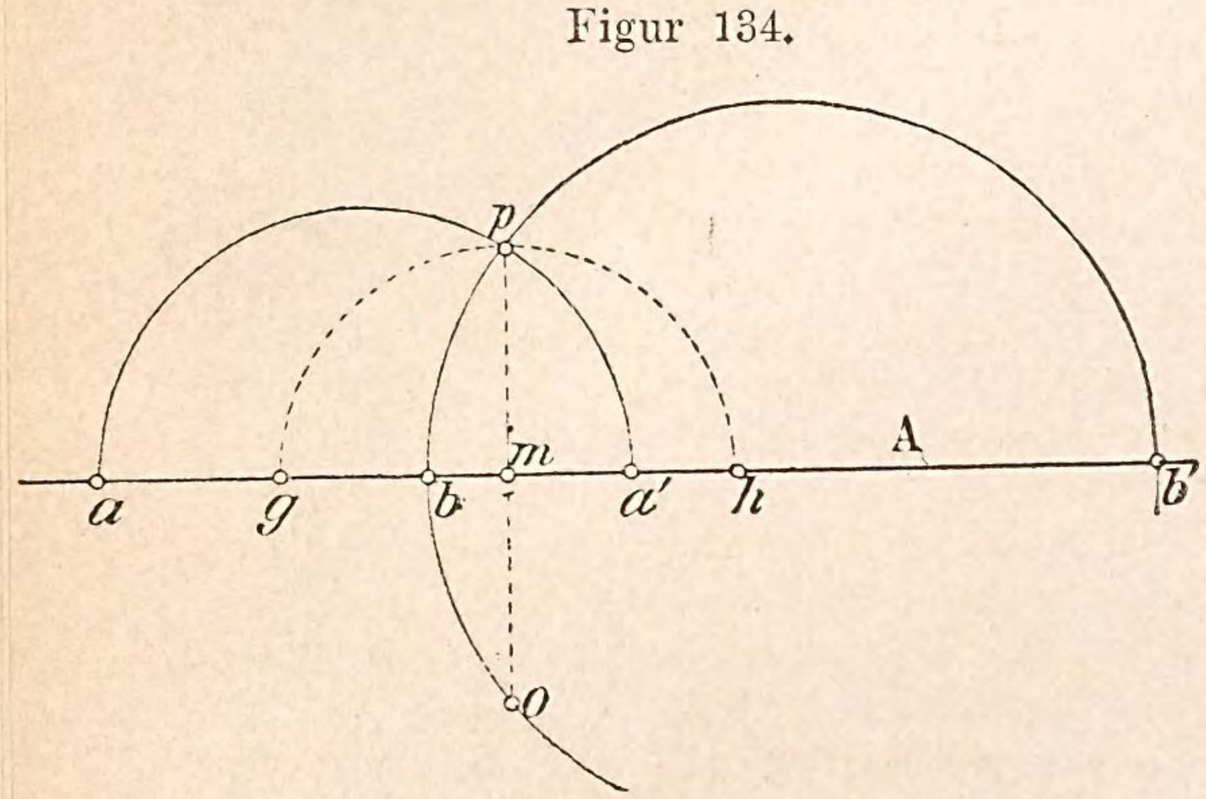
Erkl. 144. Aus der in Antw. der Frage 79 angeführten Konstruktion ist ersichtlich, dass bei einer elliptischen oder gleichlaufenden Involution die durch ein Punktpaar der Involution gebildete Strecke durch die übrigen Punktpaare getrennt wird, während dies bei der hyperbolischen oder ungleichlaufenden Involution nicht der Fall ist.

Frage 80. Wenn von einer Involution zwei zusammengehörige Punktpaare gegeben sind, wie konstruiert man in Rücksicht auf die in Antwort der Frage 79 gegebene Konstruktion die Doppelpunkte bezw. das symmetrische Punktpaar?

Figur 133.



Figur 134.



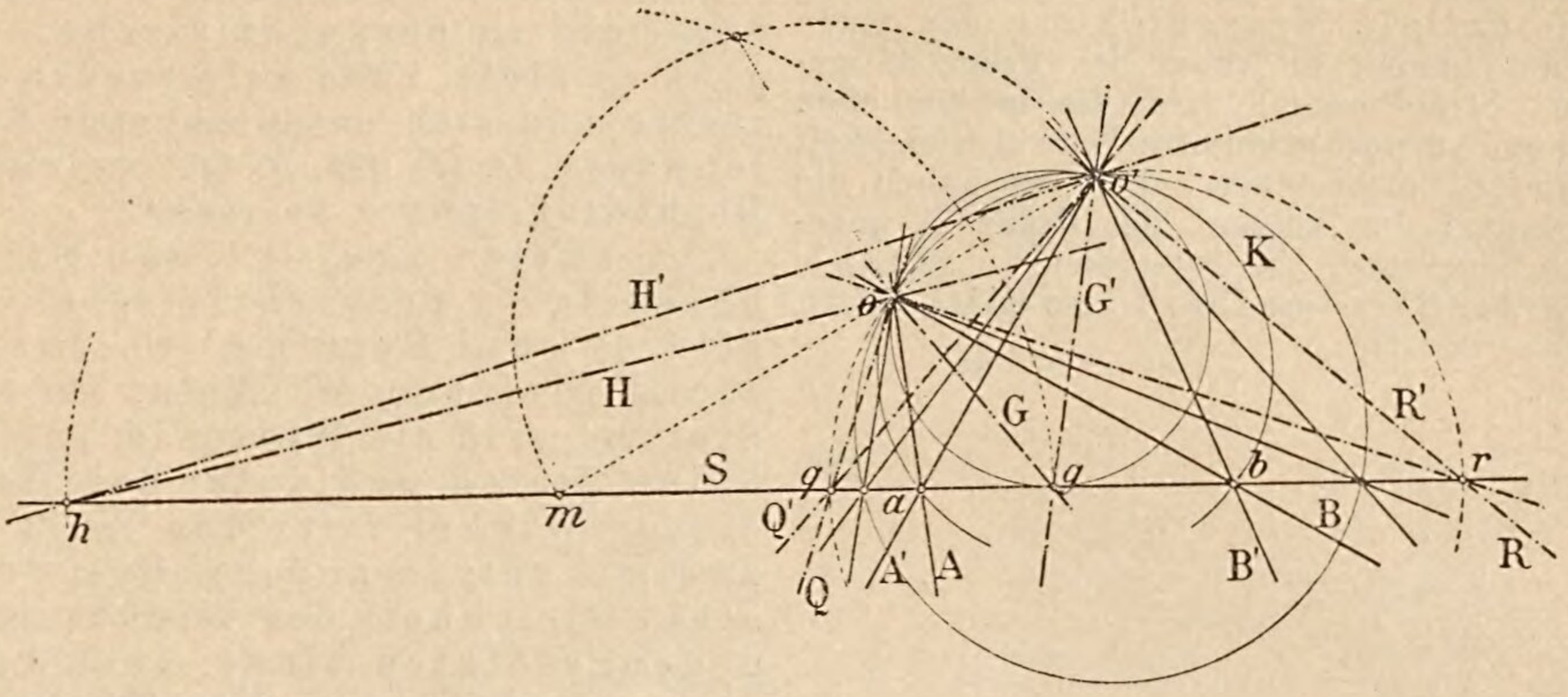
Antwort. Ist die Involution ungleichlaufend, d. h. greifen die durch die Punktpaare gebildeten Strecken nicht übereinander, so beschreibe man über der Strecke $\overline{aa'}$, etwa als Durchmesser, siehe Figur **133**, einen ersten, über der Strecke $\overline{bb'}$ als Sehne einen zweiten Kreis K und erhält hiedurch die Punkte o und p, hiedurch aber auch den Punkt m als Mittelpunkt der Involution. Die Tangente durch m an einen der beiden Kreise liefert die Länge $\overline{mt}$, welche nach beiden Seiten von m auf A nach $\overline{mn}$ und $\overline{mn'}$ abzutragen ist, um die Doppelpunkte n und n' zu erhalten. Ist die Involution gleichlaufend, d. h. greifen die Strecken $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$, siehe Figur **134**, übereinander, so liefern die über denselben als Durchmesser beschriebenen Kreise und unmittelbar die Punkte o und p und damit in der Strecke $\overline{mp}$ die Entfernung der Punkte g und h des symmetrischen Punktpaares vom Mittelpunkte m der Involution.

Frage 81. Besteht zwischen den Winkeln der Strahlen zweier projektiven Strahlbüschel eine bestimmte Beziehung, und wenn ja, welche?

Antwort. Sind o und o', siehe Figur **135**, die Mittelpunkte zweier projektiven Strahlbüschel in perspektivischer Lage mit dem perspektivischen Durchschnitt S, und beschreibt man über der Verbindungslinie $\overline{oo'}$ als Sehne eine Kreisschar, siehe Erkl. 142, so liefert jeder Kreis, z. B. K auf der Geraden S zwei Schnittpunkte a und b, welche mit o und o' verbunden zwei Paare einander entsprechender Strahlen AA' und BB' beider Büschel derart ergeben, dass der Winkel der Strahlen A, B im ersten Büschel

dem Winkel der entsprechenden Strahlen A', B' im zweiten Büschel gleich ist.

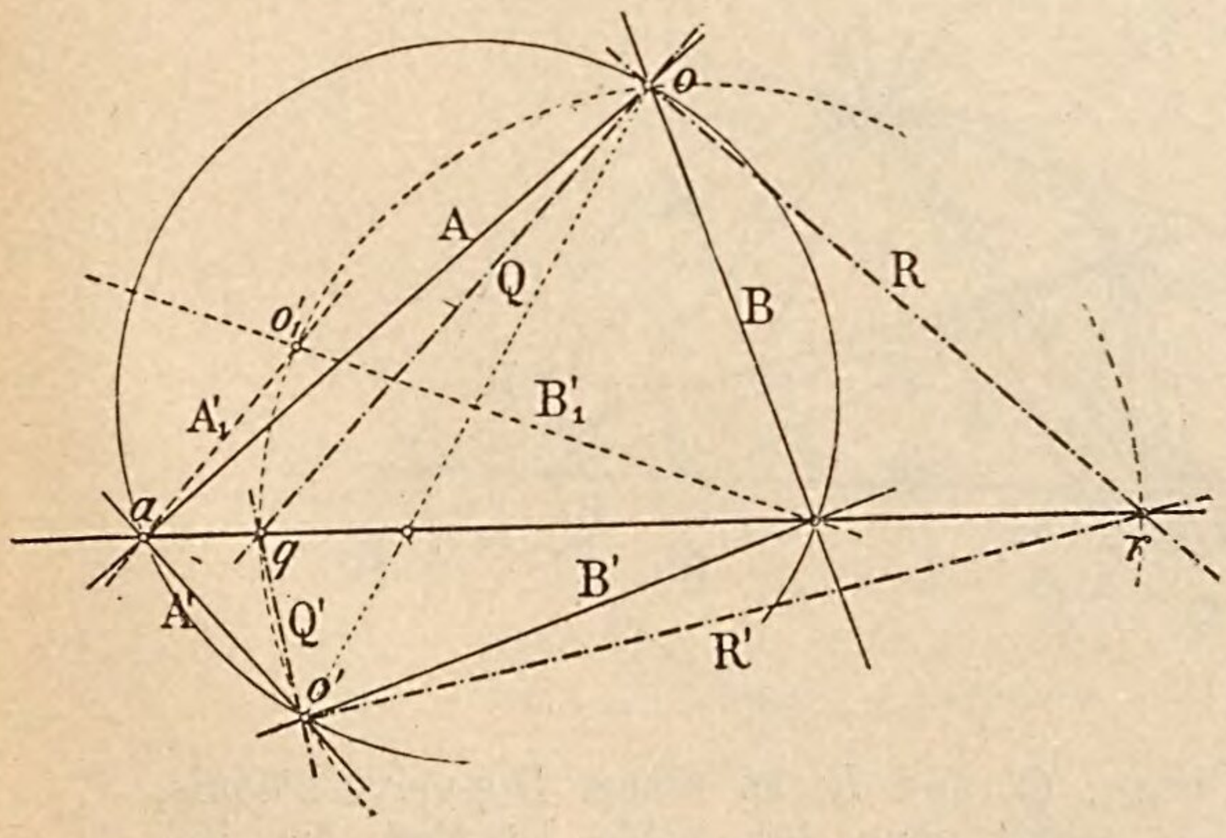
Figur 135.



Unter den Kreisen der Schar gibt es einen, dessen Mittelpunkt auf S liegt und somit den perspektivischen Durchschnitt S in den Endpunkten r und q eines Durchmessers schneidet; die Verbindungslinien der Punkte r und q mit o und o' liefern in jedem Strahl ein Paar sich gegenseitig entsprechende auf einander senkrechte Strahlen.

Endlich sind unter den Kreisen der Schar für den Fall die Mittelpunkte o und o' beider Büschel auf der nämlichen Seite von S liegen zwei vorhanden, welche den perspektivischen Durchschnitt S in dem Punkte g bezw. h berühren, in welchen also gewissermassen die Endpunkte der zugehörigen Kreissehnen zusammenfallen, so dass jede der Verbindungslinien G und G' bezw. H und H' mit o und o' einen Winkel von der Grösse Null darstellt.

Figur 136.



Liegen die Mittelpunkte o und o' auf verschiedenen Seiten von S, siehe Figur 136, so ist wohl ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf S vorhanden, dagegen gibt es keine die Gerade S berührenden Kreise, und demnach auch keine Strahlen G und G' bezw. H und H'.

Sind nun a und b die Durchschnittspunkte eines beliebigen Kreises der Schar, so schliessen die nach diesen Punkten gehenden Strahlen wieder Winkel ein, welche im gleiche Sinne gemessen, gleich sind, d. h. es ist $A\hat{B} = A'\hat{B}'$.

Denkt man sich nun das Strahlbüschel o' (A', B', C' . . . .), um den perspektivischen Durchschnitt solange gedreht, bis der Mittelpunkt o' nach o_1' gelangt, so findet zwischen je zwei Strahlen des Büschels o und den ent-

Erkl. 145. Durch eine beliebige Drehung oder parallele Verschiebung des einen oder der beiden in Antw. der Frage 81 genannten Strahlbüschel wird die in der eben genannten Antwort erläuterte Winkel-Gleichheit unverändert fortbestehen, d. h. es haben die am Schlusse der Antwort der Frage 81 angeführten Sätze auch für projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage Giltigkeit.

sprechenden Strahlen von o_1' Winkelgleichheit im entgegengesetzten Sinne statt, d. h. es ist $\hat{AB} = \hat{B_1'A_1'}$.

Aus vorstehendem ergeben sich folgende Sätze:

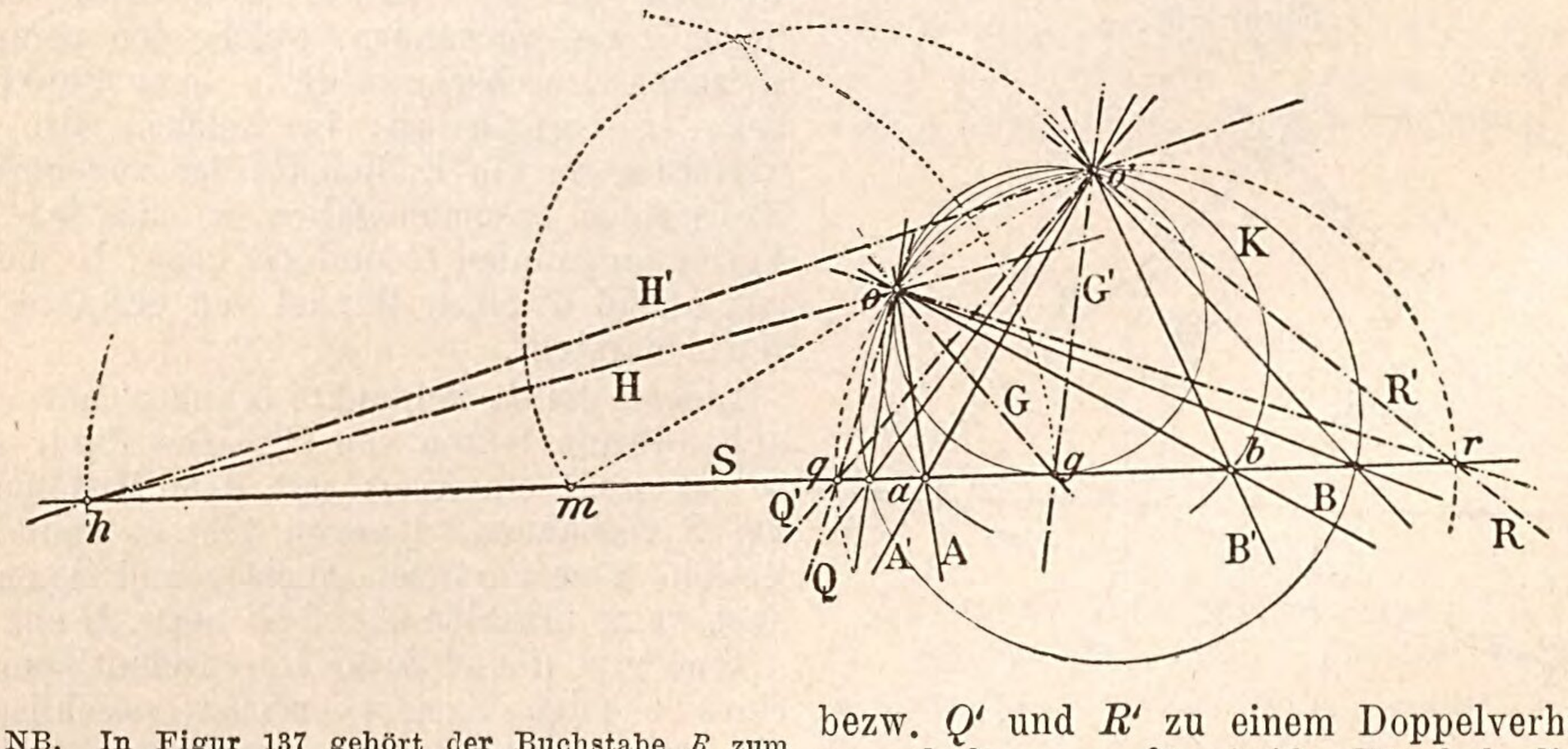
„In zweien projektiven Strahlbüscheln in perspektivischer Lage gibt es stets zwei aufeinander senkrechte und sich entsprechende Strahlenpaare Q, Q' und R, Q', welche die Rechtwinkelpaare heissen."

„In zweien projektiven Strahlbüscheln in perspektivischer Lage gibt es zwei Systeme von entsprechend gleichen Winkeln, im einen Systeme sind die Winkel im gleichen Sinne gleich und unter den Werten dieser Winkel tritt der Wert Null zweimal auf; im anderen Systeme besteht Gleichheit der Winkel im entgegengesetzten Sinne, doch kommt unter den Werten der Winkel der Wert Null nicht vor."

Frage 82. Besteht zwischen den in Antwort der Frage 81 genannten Winkelgleichheiten ein gewisser Zusammenhang und welcher?

Antwort. Nimmt man zunächst, siehe Figur 137, zwei beliebige Paare AA' und BB' entsprechender Strahlen beider Büschel und verbindet sie mit den Strahlen Q und R

Figur 137.



NB. In Figur 137 gehört der Buchstabe R zum Strahle $o\,r$, nicht zum Strahle $o'r$.

bezw. Q' und R' zu einem Doppelverhältnis, so erhält man für beide Büschel die Beziehung:

$$(AB,\ QR) = (A'B',\ Q'R')$$

$$\frac{\dfrac{\sin A\hat{Q}}{\sin B\hat{Q}}}{\dfrac{\sin A\hat{R}}{\sin B\hat{R}}} = \frac{\dfrac{\sin A'\hat{Q}'}{\sin B'\hat{Q}'}}{\dfrac{\sin A'\hat{R}'}{\sin B'\hat{R}'}} \quad \ldots\ 64)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} A\hat{R} &= 90^0 - A\hat{Q} \\ B\hat{R} &= 90^0 - B\hat{Q} \\ A'\hat{R}' &= 90^0 - A'\hat{Q}' \\ B'\hat{R}' &= 90^0 - B'\hat{Q}' \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 64 ein, so erhält man:

$$\frac{\frac{\sin A\hat{Q}}{\sin B\hat{Q}}}{\frac{\sin (90 - A\hat{Q})}{\sin (90 - B\hat{Q})}} = \frac{\frac{\sin A'\hat{Q}'}{\sin B'\hat{Q}'}}{\frac{\sin (90^0 - A'Q')}{\sin (90^0 - B'Q')}}$$

oder

$$\frac{\frac{\sin A\hat{Q}}{\sin B\hat{Q}}}{\frac{\cos A\hat{Q}}{\cos B\hat{Q}}} = \frac{\frac{\sin A'\hat{Q}'}{\sin B'\hat{Q}'}}{\frac{\cos A'\hat{Q}'}{\cos B'\hat{Q}'}}$$

oder in Rücksicht auf Erkl. 110, I. Teil des Projektionszeichnens:

$$\frac{\frac{\sin A\hat{Q}}{\sin B\hat{Q}}}{\frac{\cos A\hat{Q}}{\cos B\hat{Q}}} = \frac{\frac{\cos A'\hat{R}'}{\cos B'\hat{R}'}}{\frac{\sin A'\hat{R}'}{\sin B'\hat{R}'}}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} A\hat{Q}}{\operatorname{tg} B\hat{Q}} = \frac{\operatorname{tg} B'\hat{R}'}{\operatorname{tg} A'\hat{R}'}$$

oder

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A\hat{Q} \,.\, \operatorname{tg} A'\hat{R}' &= \operatorname{tg} B\hat{Q} \,.\, \operatorname{tg} B'\hat{R}' \\ &= \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad 65) \end{aligned}$$

In der gleichen Weise erhielte man auch die Beziehung:

$$\operatorname{tg} A'\hat{Q}' \,.\, \operatorname{tg} A\hat{R} = \operatorname{tg} B'\hat{Q}' \,.\, \operatorname{tg} B\hat{R} \,. \quad . \quad . \quad 66)$$

Die eben entwickelten Beziehungen, welche, da die Strahlen A und B im einen Büschel ganz beliebig gewählt waren für alle Paare entsprechender Strahlen Gültigkeit besitzen, lassen sich in Worten als Satz wie folgt aussprechen:

„Das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen in zweien projektiven Strahlbüscheln mit den nicht entsprechenden Schenkeln der Rechtwinkelpaare einschliessen, ist von constanter Grösse.“

Man kann den Wert genannten Produktes wieder mit k^2 bezeichnen, so dass obige Gleichungen 65 und 66 übergehen in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} A\hat{Q} \,.\, \operatorname{tg} A'\hat{R}' &= \operatorname{tg} B\hat{Q} \,.\, \operatorname{tg} B'\hat{R}' = k^2 \\ \operatorname{tg} A'\hat{Q}' \,.\, \operatorname{tg} A\hat{R} &= \operatorname{tg} B'\hat{Q}' \,.\, \operatorname{tg} B\hat{R} = k^2 \end{aligned}\right\} \ldots 67)$$

Aus der Figur 137 ersieht man ferner die Beziehung

$$\overline{mq} \,.\, \overline{mr} = \overline{mo} \,.\, \overline{mo'} = \overline{mg^2} = \overline{mh^2}.$$

Nun liegt aber m in der Mitte von $\overline{gh}$, folglich sind die Punkte q, r und g, h in Rücksicht auf Erkl. 121 vier harmonische Punkte und demnach auch die von o oder o' nach diesen Punkten gezogenen Strahlen vier harmonische Strahlen. Da endlich die Strahlen Q und R, ebenso Q' und R' je aufeinander senkrecht stehen, so halbieren dieselben die Winkel der Strahlen G, H und G', H', siehe Erkl. 122.

Man erhält somit folgende Gleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} H\hat{Q} &= Q\hat{G} \\ G\hat{R} &= R\hat{H} \\ \text{desgleichen} \\ H'\hat{Q}' &= Q'\hat{G}' \\ \text{und} \\ G'\hat{R}' &= R'\hat{H}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 68)$$

Die Gleichungen 68 enthalten aber folgenden Satz:

„In zweien projektiven Strahlbüscheln halbieren die Schenkel der Rechtwinkelpaare die von den Schenkeln der Nullwinkel gebildeten Winkel."

Frage 83. Besteht zwischen den Rechtwinkelpaaren und den übrigen entsprechend gleichen Winkeln gleichfalls ein bestimmter Zusammenhang und welcher?

Erkl. 146. Der bezügliche planimetrische Lehrsatz heisst:

„In jedem Dreieck ist der Aussenwinkel so gross, als die Summen der beiden innern, ihm gegenüberliegenden Dreieckswinkel."

Erkl. 147. Der bezügliche planimetrische Lehrsatz heisst:

„In jedem Kreise ist der Winkel, welchen eine Sehne mit der durch einen ihrer Endpunkte gezogenen Tangente bildet, gleich dem auf der Sehne stehenden Peripherie Winkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt."

Antwort. Aus der Figur 137 ist zunächst zu ersehen, dass in Rücksicht auf das Dreieck goq folgende Gleichheit stattfindet. Es ist:

$$\begin{aligned} m\hat{q}o &= q\hat{g}o + q\hat{o}g, \text{ siehe Erkl. 146.} \\ &= o\hat{o}'g + q\hat{o}g, \text{ siehe Erkl. 147.} \\ m\hat{q}o &= o\hat{o}'g + Q\hat{G} \quad \ldots \ldots \quad 69) \end{aligned}$$

Nun ist aber zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke mqo und $mo'r$

$$m\hat{q}o = m\hat{o}'r \quad \ldots \quad 70)$$

In Rücksicht hierauf geht Gleichung 69 über in

$$m\hat{o}'r = o\hat{o}'g + Q\hat{G}$$

Nach der Figur 137 ist aber

$$m\hat{o}'r - o\hat{o}'g = G'\hat{R}'.$$

Man erhält somit die Gleichheit

$$\left.\begin{array}{r} \underline{Q\hat{G} = G'\hat{R}'} \\ \text{Entsprechend erhielte man auch:} \\ Q'\hat{G}' = \hat{GR} \end{array}\right\} \ldots . 71)$$

Durch eine ähnliche Betrachtungsweise, wie die vorhergehende, findet man mit Zuhilfenahme des Dreiecks $h\,o\,q$ zunächst die Gleichheit:

$$\begin{aligned} g\hat{q}o &= q\hat{h}o + h\hat{o}q, \text{ siehe Erkl. 146.} \\ &= o\hat{o'}h + h\hat{o}q, \text{ siehe Erkl. 147.} \\ g\hat{q}o &= o\hat{o'}h + \hat{HQ} \quad \ldots \ldots \quad 72) \end{aligned}$$

Zufolge der Gleichheit 70 findet aber auch die folgende statt:

$$\begin{aligned} 180^0 - m\hat{q}o &= 180^0 - m\hat{o'}r \\ g\hat{q}o &= o''\hat{o}'r. \end{aligned}$$

(Der Buchstabe o'' ist in Figur 137 in der Verlängerung der Linie o' über o' hinaus anzubringen.)

Gleichung 72 geht somit über in

$$o''\hat{o}'r = o\hat{o'}h + \hat{HQ}$$

oder

$$o''\hat{o}'r - o\hat{o'}h = \hat{HQ} \quad \ldots . 73)$$

Nach der Figur ist aber:

$$o''\hat{o}'r - o\hat{o}'h = \hat{R'H'},$$

daher nimmt Gleichung 73 die Gestalt an

$$\left.\begin{array}{r} \hat{R'H'} = \hat{HQ} \\ \text{Entsprechend erhielte man auch:} \\ \hat{RH} = \hat{H'Q'} \end{array}\right\} \ldots 74)$$

Mit Bezug auf die Gleichungen 71 und 74 erhält man folgenden Satz:

„In zweien projektiven Strahlbüscheln bilden die Strahlen G und G', ebenso H und H' mit den nicht entsprechenden Schenkeln der Rechtwinkelpaare Winkel von gleicher Grösse aber in entgegengesetztem Sinne."

Die Gleichheiten 68, 71 und 74 lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{QG} = \hat{HQ} = \hat{G'R'} = \hat{R'H'} \\ \hat{GR} = \hat{QH} = \hat{Q'G'} = \hat{H'Q'} \end{array}\right\} \ldots 75)$$

aus welchen sich in Rücksicht auf Gleichung 65 die weiteren Gleichheiten ergeben:

$$\text{tg } \hat{AQ} \cdot \text{tg } \hat{A'R'} = \text{tg } \hat{GQ} \cdot \text{tg } \hat{G'R'}$$
$$\left.\begin{aligned} &= -\text{ tg}^2\ \hat{GQ} \cdot \\ &= -\text{ tg}^2\ \hat{G'R'} \\ &= -\text{ tg}^2\ \hat{HQ} \\ &= -\text{ tg}^2\ \hat{H'R'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 76)$$

Nimmt man nun im Büschel o (A, B, C ...) den Strahl A beliebig, desgleichen im Büschel o' (A', B', C' ...) den Strahl B' so an, dass der Winkel $\hat{AQ}$ im gleichen Sinne gleich ist dem Winkel $\hat{R'B'}$, so besteht die Gleichung

$$\text{tg } \hat{AQ} \cdot \text{tg } \hat{A'R'} = \text{tg } \hat{BQ} \cdot \text{tg } \hat{B'R'} \cdot,$$

folglich, weil

$$\text{tg } \hat{AQ} = -\text{ tg } \hat{B'R'}$$

ist, so ist auch

$$\text{tg } \hat{A'R'} = -\text{ tg } \hat{BQ}$$

oder

$$\hat{A'R'} = -\ \hat{BQ} = \hat{QB}$$

daher auch

$$\hat{AQ} + \hat{QB} = \hat{A'R'} + \hat{R'B'}$$

oder

$$\underline{AB \quad = \quad \hat{A'B'}.}$$

Lässt man den Strahl A mit G zusammenfallen, so deckt sich B' mit G', desgleichen fällt nun aber auch A' mit G' zusammen, während B mit G zur Deckung gelangt. Die entsprechend gleichen Winkel AB und $A'B'$ besitzen somit eine Grösse gleich Null; d. h. in den Strahlen G und G' fallen entsprechend gleiche Nullwinkel zusammen.

Entsprechend liesse sich auch zeigen, dass in den Strahlen H und H' entsprechende Winkel von der Grösse Null vereinigt sind.

Nimmt man aber im Büschel o (A, B, C ...), siehe Figur 137, den Strahl A beliebig, desgleichen im Büschel o' (A', B', C' ...) den Strahl B' so an, dass die Winkel $\hat{AQ}$ und $\hat{Q'B'}$ im entgegengesetzten Sinne gleich sind, so folgt, weil

$$\text{tg } \hat{A'R} = \text{tg } \hat{BQ}$$

sein muss,

$$\hat{A'R'} = \hat{BQ},$$

daher auch

$$\begin{aligned} \hat{AQ} + \hat{QB} &= \hat{B'R'} + \hat{A'R'} \\ \hat{AB} &= \hat{B'R'} + \hat{R'A'} \\ \hat{AB} &= \hat{B'A'}. \end{aligned}$$

Erkl. 148. Aus den Entwickelungen in Antwort der Frage 83 folgen mit Bezugnahme auf Erkl. 145 die Sätze:

„In zweien projektiven Strahlbüscheln gibt es zwei Systeme von entsprechend gleichen Winkeln; im ersten System sind die Winkel im gleichen, im zweiten System im ungleichen Sinne gleich."

„Die nicht entsprechenden Schenkel entsprechend gleicher Winkel schliessen mit den nicht entsprechenden Schenkeln der Rechtwinkelpaare Winkel von gleicher Grösse und zwar in entgegengesetztem oder gleichen Sinne ein, je nachdem die entsprechend gleichen Winkel im gleichen oder entgegengesetzten Sinne gleich sind."

„Der kleinste unter den im gleichen Sinne entsprechend gleichen Winkeln auftretende Winkel besitzt die Grösse Null; er tritt in jedem Strahlbüschel zweimal auf und ist durch die Strahlen G und G' bezw. H und H' seiner Lage nach gegeben, der kleinste Winkel im anderen System ist dagegen durch den Winkel GH bezw. $G'H'$ gegeben."

d. h. die Winkel $\hat{AB}$ und $\hat{A'B'}$ sind im entgegengesetzten Sinne gleich.

Da

$$\hat{AB} = \hat{AQ} + \hat{QB}$$

ist, gilt auch die Beziehung

$$\text{tg } \hat{AB} = \text{tg } (\hat{AQ} + \hat{QB})$$

oder in Rücksicht auf die Beziehung, siehe Erkl. 110, I. Teil des Projektionszeichnens:

$$\text{tg } \hat{AB} = \frac{\text{tg } \hat{AQ} + \text{tg } \hat{QB}}{1 - \text{tg } \hat{AQ} \,.\, \text{tg } \hat{QB}}.$$

Nun ist aber,

$$\text{tg } \hat{AQ} = \text{tg } \hat{B'R'},$$

folglich

$$\text{tg } \hat{AB} = \frac{\text{tg } \hat{B'R'} + \text{tg } \hat{QB}}{1 - \text{tg } \hat{B'R'} \,.\, \text{tg } \hat{QB}}$$

oder in Rücksicht darauf, dass

$$\text{tg } \hat{B'R'} \,.\, \text{tg } \hat{QB} = - \text{tg}^2 \, \hat{QG}$$

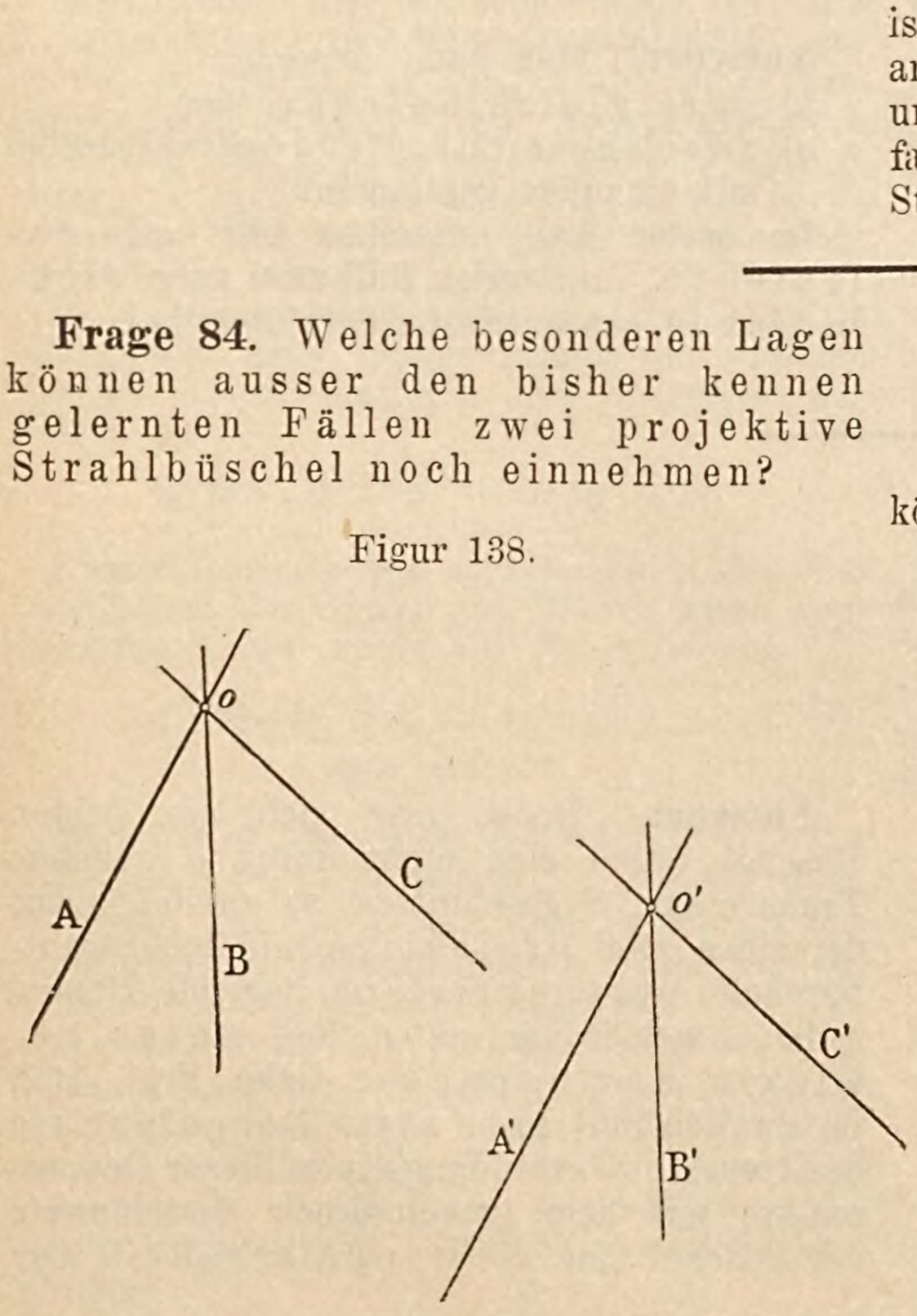
ist

$$\text{tg } \hat{AB} = \frac{\text{tg } \hat{QB} + \text{tg } \hat{B'R'}}{1 + \text{tg}^2 \, \hat{QG}} \quad \ldots 77)$$

Der Ausdruck 77 erhält seinen kleinsten Wert, da der Nenner eine constante Grösse ist, wenn der Zähler seinen kleinsten Wert annimmt, was der Fall ist, wenn die Strahlen B und B' mit den Strahlen H und H' zusammenfallen, denn in diesem Fall deckt sich der Strahl A mit G, der Strahl A' aber mit G'.

Frage 84. Welche besonderen Lagen können ausser den bisher kennen gelernten Fällen zwei projektive Strahlbüschel noch einnehmen?

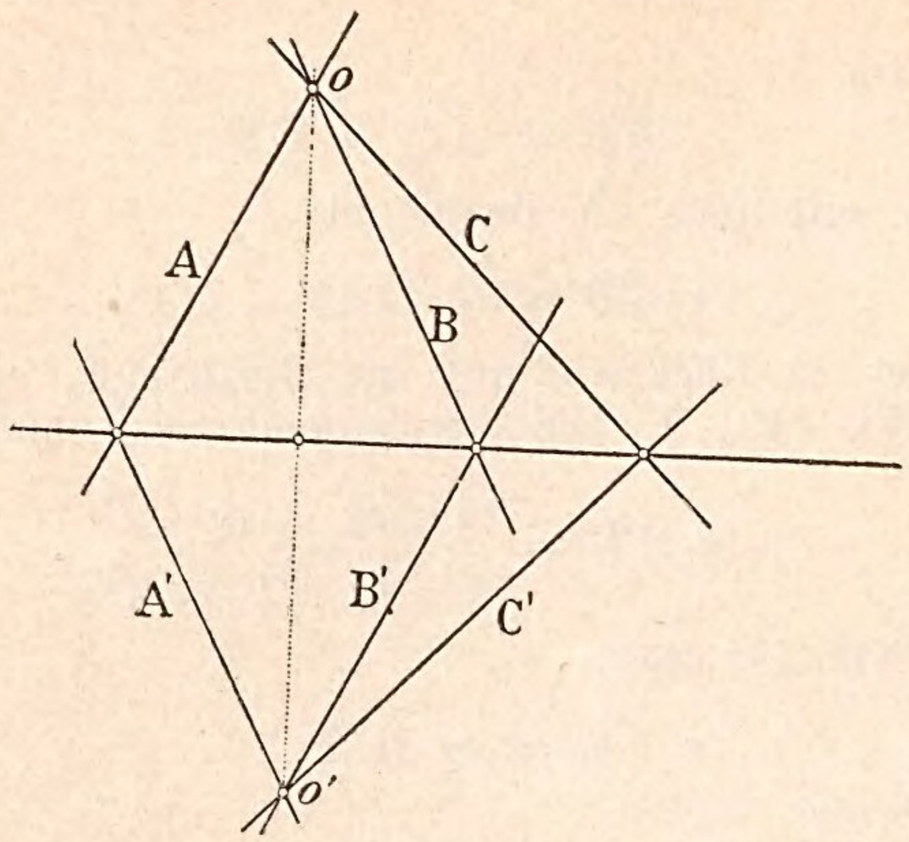
Figur 138.



Antwort. Zwei projektive Strahlbüschel können

a) in perspektivischer Lage sich befinden, und zwar so, dass, wie in Figur 138 der perspektivische Durchschnitt in unendliche Ferne gerückt ist, so dass die sämtlichen entsprechenden Strahlenpaare AA', BB', CC' . . . zu einander parallel laufen oder es kann der perspektivische Durchschnitt die Verbindungslinie oo' der Mittelpunkte senkrecht hälften, siehe Figur 139. In beiden Fällen bilden dann je zwei entsprechende Strahlenpaare in beiden Büscheln gleiche Winkel von gleichem bezw. entgegengesetztem Sinne und die Strahlbüschel heissen im ersten Fall projektiv gleich und gleichlaufend, im zweiten Fall pro-

Figur 139.



Erkl. 149. Man sagt überhaupt zwei Strahlbüschel seien gleichlaufende oder ungleichlaufende, wenn in beiden Büscheln die Aufeinanderfolge entsprechender Strahlen im gleichen oder entgegengesetzten Sinne stattfindet.

Frage 85. In welcher Weise kann man sich zwei concentrische Strahlbüschel entstanden denken?

jektivisch gleich und ungleichlaufend.

Dreht oder verschiebt man die beiden Büschel in beliebiger Weise gegeneinander, so bleibt die eben angedeutete Winkelgleichheit bestehen und man erhält zwei projektivisch gleiche und gleich oder ungleichlaufende Strahlbüschel in allgemeiner Lage.

b) in soferne eine besondere Lage zu einander einnehmen, als ihre Mittelpunkte in einem Punkte zusammenfallen. Man erhält in diesem Fall zwei projektive Strahlbüschel mit gemeinsamem Mittelpunkt oder zwei concentrische Strahlbüschel.

Frage 86. Gibt es in zweien concentrischen Strahlbüscheln auch solche Strahlen, in welchen entsprechende Strahlen beider Strahlbüschel zusammenfallen (Doppelstrahlen), und wenn ja, wie konstruiert man dieselben?

Antwort. Denkt man sich die beiden Büschel durch eine nicht durch *o* gehende Transversale **S** geschnitten, so entstehen auf derselben zwei projektive mit den Strahlbüscheln perspektivisch liegende Punktreihen, welche im ersten Fall unter gewissen Bedingungen, siehe Erkl. **132**, im zweiten Fall aber stets Doppelpunkte besitzen. Die Verbindungslinien dieser Doppelpunkte mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Büschel sind die Doppelstrahlen der

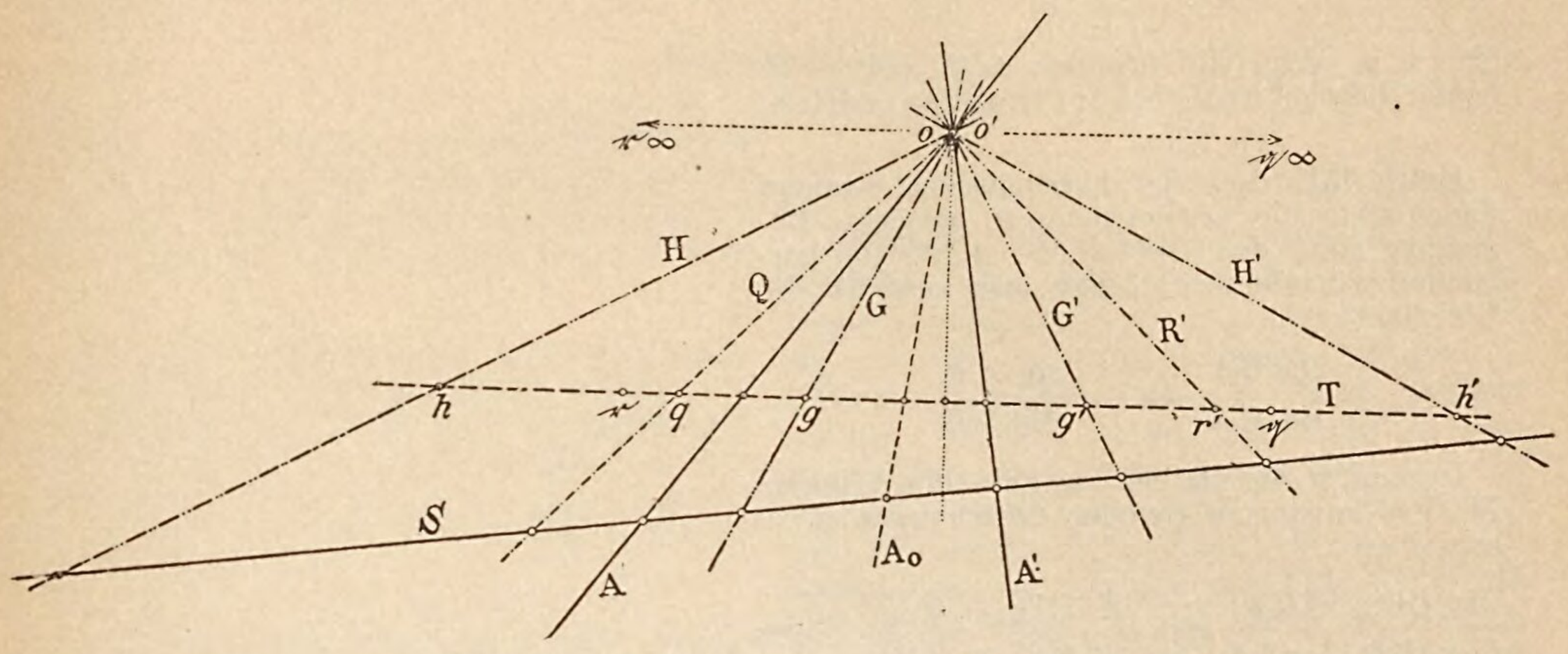
Antwort. Man kann entweder
a) zwei gleichlaufende oder
b) zwei ungleichlaufende Strahlbüschel mit einander vereinigen.

Im ersten Fall entstehen zwei gleichlaufende, im zweiten Fall zwei ungleichlaufende concentrische Strahlbüschel.

---

beiden Büschel. Man verschafft sich somit, siehe Antwort der Frage **74**, die Doppelpunkte auf S und verbindet dieselben durch Strahlen mit oo'.

Figur 140.



Erkl. 150. Mit Hilfe des bisherigen lässt sich nun in einfacher Weise zeigen, unter welchen Bedingungen auch gleichlaufende concentrische Strahlbüschel Doppelstrahlen besitzen können.

Sind nämlich in oo', siehe Figur 140, die Mittelpunkte concentrischer Strahlbüschel gegeben, in welchen Q und R' die nicht entsprechenden Schenkel der Rechtwinkelpaare darstellen sollen — während durch G und H ebenso G' und H' die Schenkel der entsprechenden Nullwinkel gegeben sein sollen, so lässt sich folgendes zeigen:

Ist A ein beliebiger Strahl des einen Büschels und heisst sein entsprechender im anderen Büschel A', so bestimmt sich A' mittels der Beziehung

$$\operatorname{tg} \hat{QA} \cdot \operatorname{tg} \hat{R'A'} = -\operatorname{tg}^2 \hat{QG}.$$

Konstruiert man nun zum Strahle A den ihm hinsichtlich der Strahlen GH harmonisch conjugierten Strahl A_0, so gilt die Beziehung

$$\operatorname{tg} \hat{QA} \cdot \operatorname{tg} \hat{QA_0} = \operatorname{tg}^2 \hat{QG} \quad \ldots . \; 78)$$

siehe Erkl. 151.

Macht man daher den Winkel $R'A'$ im entgegengesetzten Sinne gleich dem Winkel $\hat{QA_0}$, so erhält man in A' den dem Strahle A des einen Büschels entsprechenden Strahl des andern Büschels, derselbe liegt offenbar symmetrisch zum Strahle A_0 hinsichtlich der Halbierlinie des Winkels $\hat{GG'}$. Eine zu dieser Halbierlinie senkrechte Transversale T schneidet die Strahlbüschel in zweien projektiven Punktreihen, durch deren Doppelpunkte die Doppelstrahlen der Büschel hindurchgehen werden.

Nimmt man die Mitte von qh und $g'h'$ bezw., so entsprechen diesen Halbierpunkten r und q' bezw. die unendlich fernen Punkte beider Reihen, und es sind somit Doppelpunkte nur dann vorhanden, siehe Erkl. 132, wenn

$$\overline{gh} = k \overset{<}{=} \frac{1}{2} \overline{\mathrm{r\,q'}}$$

ist, d. h. wenn die Strahlen GH und $G'H'$ beider Büschel nicht übereinandergreifen.

Erkl. 151. Bei vier harmonischen Strahlen findet stets die in Gleichung 78 bemerkte Beziehung statt, denn sind H, G, A, A_0 vier harmonische Strahlen, so erhält man zunächst die Gleichheit:

$$\frac{\sin \mathrm{H\hat{A}}}{\sin \mathrm{G\hat{A}}} = - \frac{\sin \mathrm{H\hat{A}_0}}{\sin \mathrm{GA_0}}$$

Ist nun G die Halbierungslinie des Winkels HG, so kann man die obige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\sin (\mathrm{H\hat{Q}} + \mathrm{QA})}{\sin (\mathrm{H\hat{Q}} - GA} = - \frac{\sin (\mathrm{H\hat{Q}} + \mathrm{Q\hat{A}_0})}{\sin (\mathrm{QA_0} - \mathrm{HQ})} \quad \ldots 79)$$

Wird diese Gleichung mit Bezugnahme auf die Gleichungen, siehe Erkl. 110 I. Teil des Projektionszeichnens, aufgelöst, so erhält man schliesslich

$$\mathrm{tg\ Q\hat{A} \,.\, tg\ Q\hat{A}_0} = \mathrm{tg^2\ HQ} = \mathrm{tg^2\ Q\hat{G}} \quad \ldots 80)$$

Erkl. 152. Die Ableitung der Gleichung 80 kann in folgender Weise vorgenommen werden:

Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \sin (\mathrm{H\hat{Q}} + \mathrm{Q\hat{A}}) = \sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} + \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}} \ldots\ldots \\ \sin (\mathrm{H\hat{Q}} - \mathrm{Q\hat{A}}) = \sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} - \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}} \ldots\ldots \\ \sin (\mathrm{H\hat{Q}} + \mathrm{Q\hat{A}_0}) = - \sin \mathrm{HQ} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0} - \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}_0} \ldots\ldots \\ \sin (\mathrm{HQ} - \mathrm{Q\hat{A}_0}) = \sin \mathrm{HQ} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0} - \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{QA_0} \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots 81)$$

Gleichung 79 geht somit über in

$$\frac{\sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} + \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}}}{\sin \mathrm{HQ} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} - \cos \mathrm{HQ} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}}} = - \frac{\sin \mathrm{HQ} \,.\, \cos \mathrm{\hat{Q}A_0} + \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \sin \mathrm{\hat{Q}A_0}}{\sin \mathrm{HQ} \,.\, \cos \mathrm{QA_0} - \cos \mathrm{HQ} \,.\, \sin \mathrm{QA_0}}$$

Führt man die Multiplikation durch, so erhält man:

$$\sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{Q}A} \,.\, \sin \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0} - \left(\sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}_0}\right) - \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}_0}$$
$$+ \left(\cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0}\right) = - \sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \sin \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0} - \left(\sin \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \sin \mathrm{\hat{Q}A_0}\right)$$
$$+ \left(\sin \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \sin \mathrm{\hat{Q}A} \,.\, \cos \mathrm{\hat{Q}A_0}\right) + \cos \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{H}Q} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}_0}.$$

welche Gleichung in folgende übergeführt werden kann:

$$\frac{\sin^2 \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \cos \mathrm{\hat{Q}A} \,.\, \cos \mathrm{Q\hat{A}_0}}{\cos^2 \mathrm{H\hat{Q}} \,.\, \sin \mathrm{\hat{Q}A} \,.\, \sin \mathrm{Q\hat{A}_0}} = 1,$$

d. h.

$$\mathrm{tg^2\ H\hat{Q}} = \mathrm{tg\ \hat{Q}A} \,.\, \mathrm{tg\ QA_0} \ldots\ldots \quad 82)$$

NB. Die eingeklammerten Glieder heben sich bei der Multiplikation weg.

Erkl. 153. Aus dem in Erkl. 150 Entwickelten folgen mit Bezugnahme auf die Antwort der Frage 86 folgende Sätze:

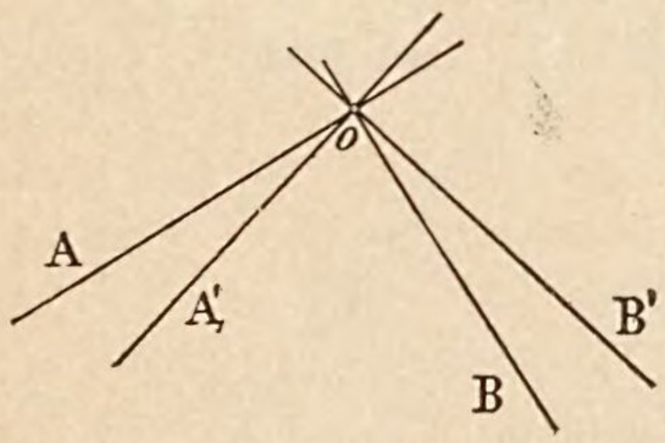
„Zwei concentrische ungleichlaufende Strahlbüschel besitzen nur dann Doppelstrahlen, wenn die Schenkel der entsprechenden Nullwinkel nicht übereinander greifen."

Frage 87. Kann es unter Umständen auch vorkommen, dass die Strahlen zweier concentrischen Strahlbüschel sich in besonderer Weise entsprechen?

Erkl. 154. Zwei concentrische Strahlbüschel, welche in der in Antwort der Frage 87 gekennzeichneten Weise übereinander liegen, bilden ein Strahlsystem oder eine Strahleninvolution oder eine Involution von Strahlen oder endlich ein involutorisches Strahlenbüschel.

Erkl. 155. Die nicht entsprechenden Schenkel entsprechend gleicher Winkel bilden je ein zusammengehöriges oder conjugiertes Strahlenpaar der Involution; man bezeichnet solche zusammengehörige Strahlen mit dem nämlichen Buchstaben und versieht zweckmässig den einen Strahl mit einem Index, z. B. A und A', B und B', C und C' etc., siehe Figur 141.

Figur 141.



Erkl. 156. Bei einem involutorischen Strahlenbüschel fallen die Rechtwinkelpaare mit ihren nicht entsprechenden Schenkeln aufeinander und bilden gleichfalls ein conjugiertes Strahlenpaar MM', welches man die Achsen der Involution nennt. Der Mittelpunkt des Büschels heisst zugleich der Mittelpunkt der Involution.

Erkl. 157. Ein involutorisches Strahlenbüschel ist vollständig bestimmt, sobald man zwei Paare conjugierter Strahlen kennt.

Erkl. 158. Da die Involution sich nur als ein besonderer Fall zweier concentrischer Strahlbüschel darstellt, so ist klar,

Antwort. Analog wie bei zweien aufeinander liegenden Punktreihen sich jeder Punkt doppelt auffassen lässt, so kann man auch bei zweien concentrischen Strahlbüscheln jeden Strahl, z. B. A, doppelt nehmen, nämlich einmal als Strahl A des einen Büschels, dann entspricht ihm im anderen Büschel ein Strahl A'. Fasst man aber den erstgenannten Strahl als zum zweiten Büschel gehörig auf und nennt ihn für diesen Fall B', so entspricht ihm im ersten Büschel ein Strahl B und es werden im allgemeinen die Strahlen A und B nicht zusammenfallen. Im besonderen kann aber der Fall eintreten, dass die Strahlen A und B', desgleichen A' und B sich decken, und dies wird stets geschehen, wenn die Winkel $A\hat{B}$ und $A'\hat{B}'$ einander im entgegengetzten Sinne gleich sind.

Da es nun in zweien projektiven Strahlbüscheln zwei Systeme von entsprechend gleichen Winkeln gibt, so können die Büschel in zweifacher Weise aufeinandergelegt werden, nämlich so, dass entweder das eine oder das andere System entsprechend gleicher Winkel zur Deckung gelangt. Im einen Falle decken sich dann die entsprechenden Schenkel G und G' ebenso H und H' der Nullwinkel, im anderen Fall kommen die Strahlen G und H' ebenso H und G' aufeinander zu liegen.

dass eine Involution Doppelstrahlen besitzen kann oder nicht. Schneidet man eine Strahleninvolution durch eine Transversale, so erhält man offenbar eine Punktinvolution, durch deren Doppelpunkte die Doppelstrahlen der Strahleninvolution hindurchgehen. Solche Doppelstrahlen sind also stets vorhanden, wenn die Winkel conjugierter Strahlenpaare nicht übereinandergreifen; greifen sie übereinander, so besitzt die Involution keine Doppelstrahlen, sie heisst im ersten Fall eine hyperbolische, im zweiten Fall eine elliptische Involution. Im ersten Fall sind die Doppelstrahlen gebildet durch die aufeinanderliegenden entsprechenden Nullwinkel G, G' und H, H', im zweiten Fall bilden die aufeinanderfallenden Strahlen G, H' und H, G' ein zu den Achsen der Involution symmetrisch liegendes conjugiertes Strahlenpaar.

Erkl. 159. Da die Doppelpunkte einer Punktinvolution die durch die übrigen Punktpaare gebildeten Strecken harmonisch trennen, so trennen auch die Doppelstrahlen einer Stahleninvolution die Winkel der übrigen Strahlenpaare harmonisch.

Erkl. 160. Besitzt eine Strahleninvolution, siehe Figur 142, zwei rechtwinklig conjugierte Strahlenpaare A, A' und M, M', so sind auch alle übrigen conjugierten Strahlenpaare B, B' rechtwinklig, denn sind M und M' die Achsen der Involution, so findet ja die Beziehung statt, siehe Gleichung 76.

$$\operatorname{tg} A\hat{M} \cdot \operatorname{tg} A'\hat{M} = \operatorname{tg} B\hat{M} \cdot \operatorname{tg} B'\hat{M}$$
$$= \operatorname{tg} C\hat{M} \cdot \operatorname{tg} C'\hat{M}' = \text{const.} - \operatorname{tg} \overline{GM^2}.$$

Ist nun das Strahlenpaar A, A' rechtwinklig, so ist

$$A\hat{M} = 90^0 - M\hat{A}',$$

folglich

$$\operatorname{tg} A\hat{M} = -\frac{1}{\operatorname{tg} A'\hat{M}}$$

oder

$$\operatorname{tg} A\hat{M} \cdot \operatorname{tg} A'\hat{M} = -1,$$

und demnach auch

$$\operatorname{tg} B\hat{M} \cdot \operatorname{tg} B'\hat{M} = \operatorname{tg} C\hat{M} \cdot \operatorname{tg} C'\hat{M} = -1$$

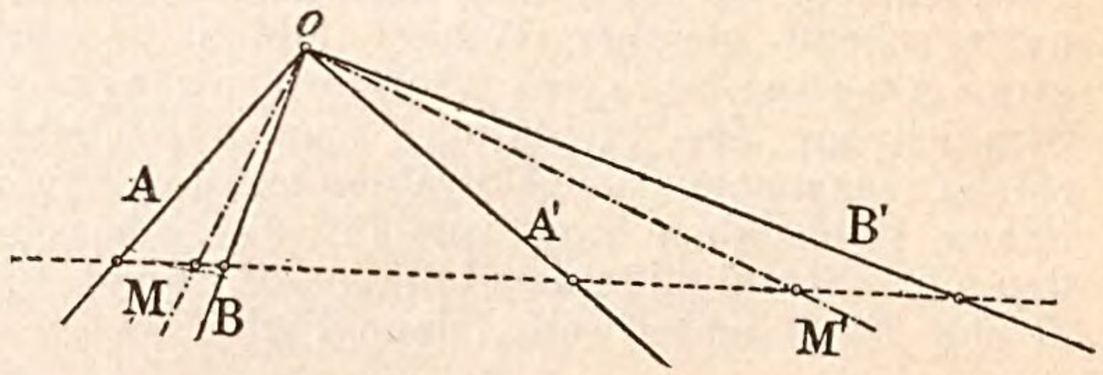
d. h.

$$B\hat{B}' = C\hat{C}' = 90^0.$$

Vorstehendes Resultat enthält der Satz:

„Dreht sich in der Ebene ein rechter Winkel um seinen Scheitel, so beschreiben seine Schenkel eine Strahleninvolution."

Figur 142.

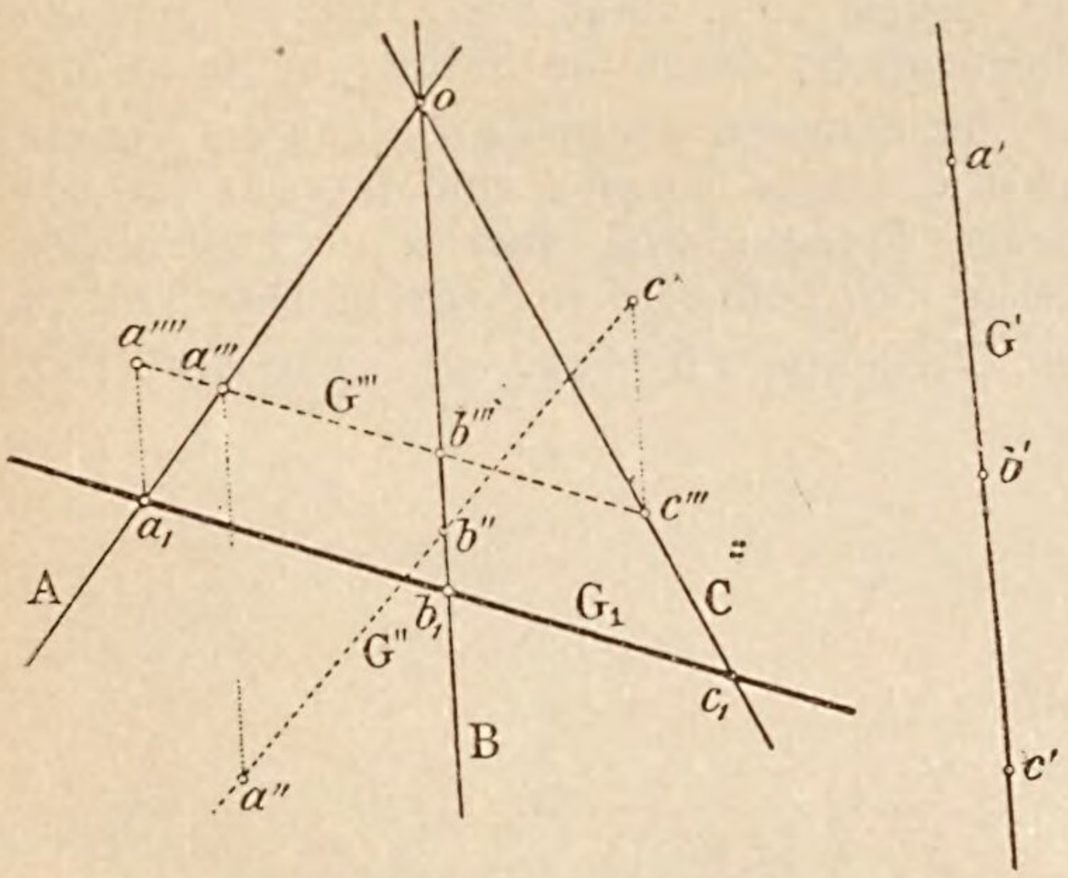


Anmerkung 16. Die im Vorangegangenen entwickelten Beziehungen über entsprechend gleiche Winkel, concentrische Strahlbüschel, involutorische Strahlbüschel gelten in gleicher Weise auch für Ebenenbüschel, nur ist hiebei zu beachten, dass zweien concentrischen Strahlbüscheln stets zwei Ebenenbüschel mit gemeinsamer Achse, d. h. zwei coachsiale Ebenenbüschel entsprechen ferner, dass überall statt des Winkels zweier Strahlen der Winkel zweier Ebenen einzuführen ist.

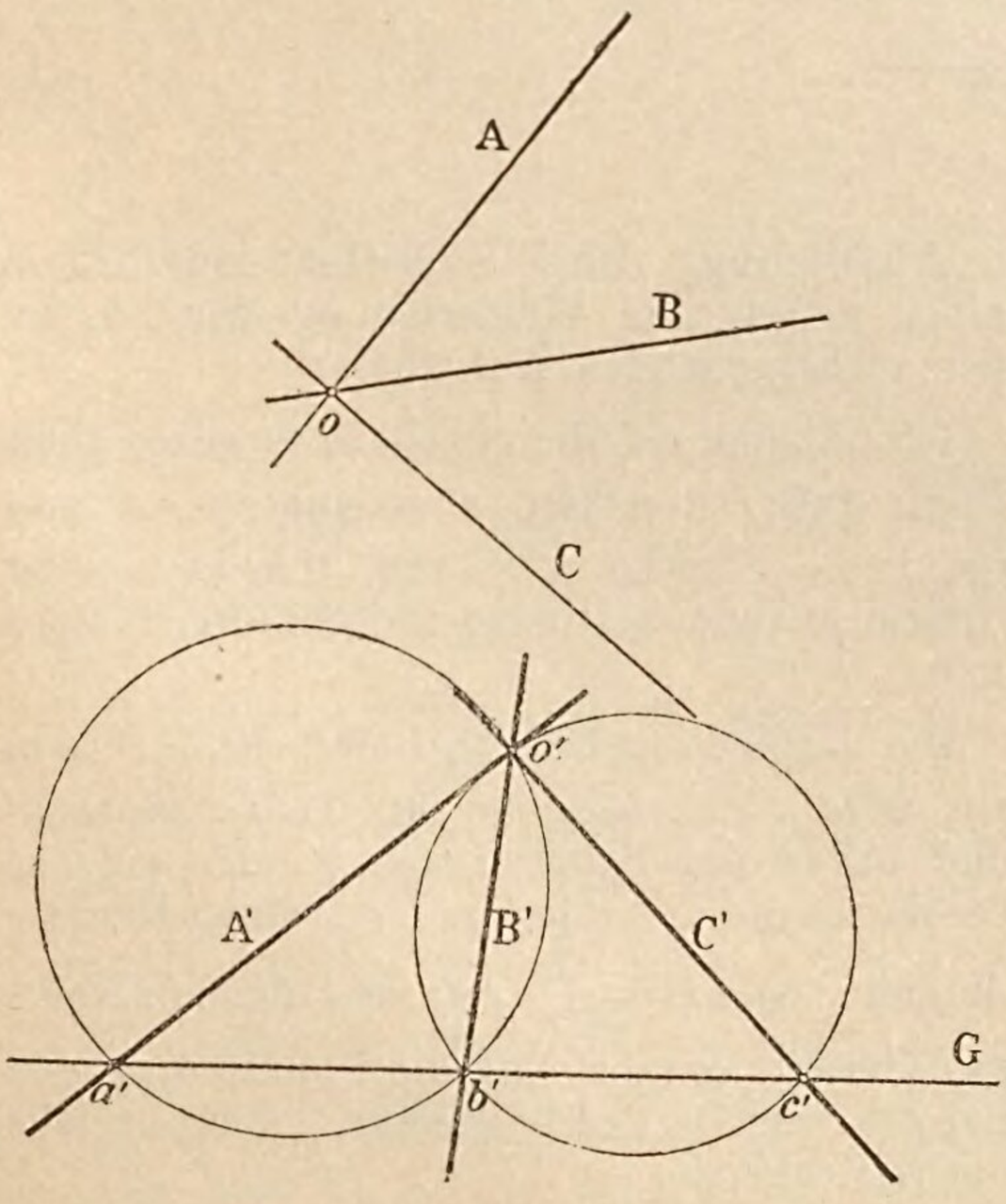
Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 89. Eine Punktreihe und ein zu derselben projektives Strahlbüschel in allgemeiner Lage sind gegeben. Man soll die Punktreihe und das Strahlbüschel in perspektivische Lage bringen.

Figur 143.



Figur 144.



Auflösung. Die Aufgabe ist in zweifacher Weise lösbar, nämlich

a) durch Verlegung der Punktreihe oder

b) durch Verlegung des Strahlbüschels.

Auflösung a. Ist, siehe Figur **143**, durch $o\,(A, B, C \ldots)$ das Strahlbüschel durch $a', b', c' \ldots$ die Punktreihe auf dem Träger G' gegeben, so wähle man etwa auf dem Strahle B den Punkt b'' ganz beliebig, ziehe durch ihn eine Gerade G'' in willkürlicher Richtung und mache die Abschnitte $\overline{b''a''}$ und $\overline{b''c''}$ gleich und gleich gerichtet den Abschnitten $\overline{a'b'}$ und $\overline{b'c'}$. Die Parallelen durch c'' und a'' zu B bestimmen auf C und A zwei Punkte c''' und a'''' einer Geraden G''', welche den Strahl B in b''' so trifft, dass die Verhältnisgleichheit stattfindet

$$\frac{\overline{a''b''}}{\overline{b''c''}} = \frac{\overline{a''''b'''}}{\overline{b'''c'''}}$$

Macht man nun die Strecke $\overline{b'''a''''}$ gleich und gleich gerichtet der Strecke $\overline{b'a'}$ auf G', so bestimmt die Parallele $a''''a_1$ zu B auf A einen Punkt a_1, durch welchen parallel zu G''' die Gerade G_1 zu ziehen ist, welche mit dem Strahlbüschel $o\,(A, B, C \ldots)$ eine zu letzterem perspektivisch liegende Punktreihe bestimmt, die der Punktreihe auf G' projektiv gleich ist, denn es ist ja

$$\frac{\overline{a'''b'''}}{\overline{b'''c'''}} = \frac{\overline{a_1b_1}}{\overline{b_1c_1}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{b'c'}}.$$

Wie viele Gerade G_1 gibt es?

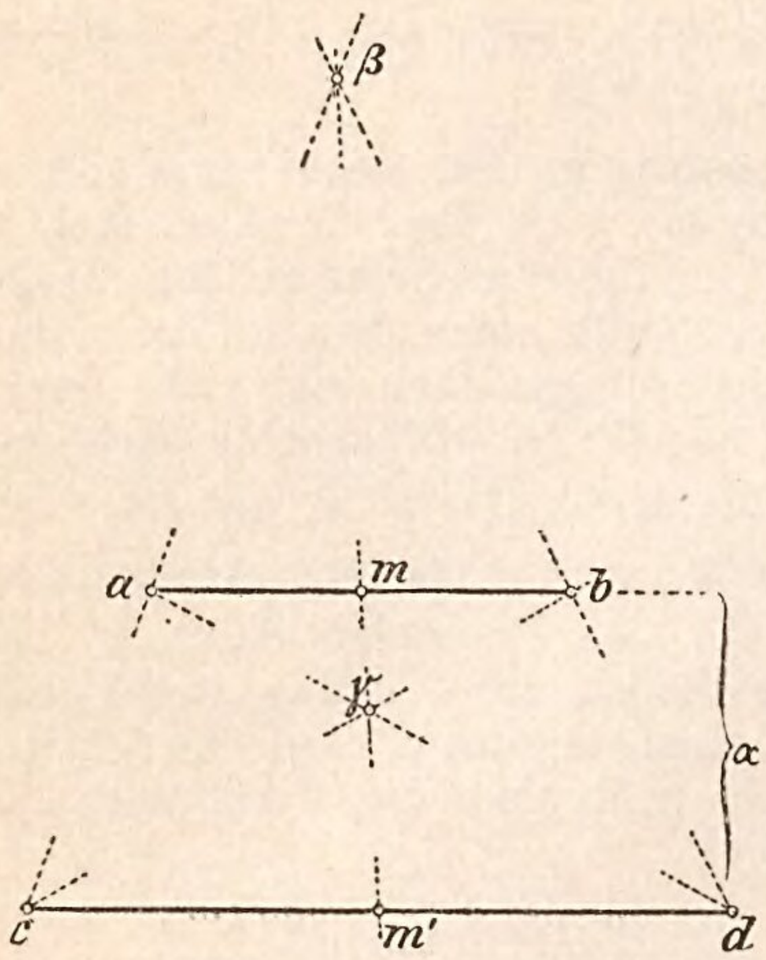
Auflösung b. Man beschreibt, siehe Figur **144**, über den Strecken $\overline{a'b'}$ und $\overline{b'c'}$ Kreise, welche als Peripheriewinkel die Winkel $\hat{AB}$ und $\hat{BC}$ fassen, siehe Erkl. 43 II. Teil des Projektionszeichnens, ihr Schnittpunkt o' ist der Mittelpunkt des Strahlbüschels $o'\,(A', B', C' \ldots)$ das zur Punkt-

reihe auf G' perspektivisch liegt und dem Büschel o (A, B, C . . .) projektivisch gleich ist, siehe Antw. der Frage 84.
Wieviel Punkte o' gibt es?

Anmerkung 17. Ist statt eines Strahlbüschels ein Ebenenbüschel perspektivisch zu einer Geraden zu legen, so schneidet man zweckmässig das Ebenenbüschel senkrecht zu seiner Achse nach einem Strahlbüschel und legt dieses perspektivisch zur Punktreihe, wie in Aufgabe 89. Hiedurch ist dann auch die Lage des durch das Strahlbüschel gehenden Ebenenbüschels bestimmt.

Aufgabe 90. Zwei parallele Strecken ab und cd, siehe Figur 145, sind gegeben, man soll dieselben ohne Hilfe des Zirkels halbieren.

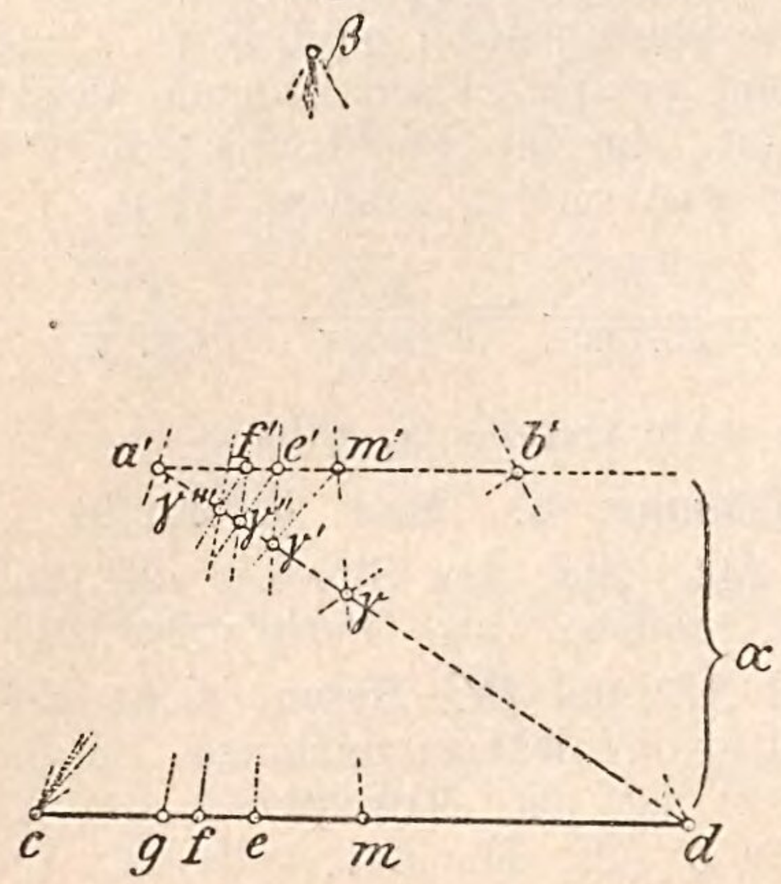
Figur 145.



Auflösung. Verbindet man die vier Punkte a, b, c, d, siehe Figur 145, zu einem vollständigen Viereck und bestimmt die Schnittpunkte der Gegenseiten, siehe Erkl. 124, so geht die Diagonale $\beta\gamma$ durch die Halbierpunkte m und m' der Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{ed}$, denn die Punkte $abm\alpha$, ebenso $dcm'\alpha$ sind je vier harmonische Punkte; weil aber α in unendlicher Ferne sich befindet, so liegt m bezw. m' in der Mitte von $\overline{ab}$ bezw. $\overline{cd}$, siehe Erkl. 120.

Aufgabe 91. Eine gegebene Strecke $\overline{ad}$ ist in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Figur 146.



Auflösung. Dieselbe besteht lediglich in einer mehrfachen Wiederholung der Lösung der vorhergehenden Aufgabe.

Ist nämlich $\overline{cd}$ die gegebene Strecke, siehe Figur 145, so nehme man eine zu cd parallele Strecke $a'b'$ von beliebiger Grösse an und bestimme die Schnittpunkte β und γ.

Die Verbindungslinie $\beta\gamma$ liefert die Mitte m von $\overline{a'b'}$, siehe Aufgabe 90. Zieht man cm' und durch den Schnittpunkt γ' mit ad, so bestimmt die Linie $\beta\gamma'$ auf cd einen Punkt e derart, dass $\overline{ce} = \frac{1}{3}\ \overline{cd}$ ist, denn zufolge des Vierecks $cm\gamma a'$ sind die Punkte a, m, e, d vier harmonische Punkte, daher besteht die Gleichheit:

$$\frac{\overline{ce}}{\overline{em}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{md}}$$

oder weil $cd = 2md$ ist

$$\overline{ce} = \frac{\overline{em} \cdot 2\overline{md}}{\overline{md}}$$

$$= \overline{2em}$$

$$= 2\left(\frac{\overline{cd}}{2} - \overline{ce}\right)$$

$$= \overline{cd} - \overline{2ce}$$

oder

$$\overline{3ce} = \overline{cd}$$

d. h.

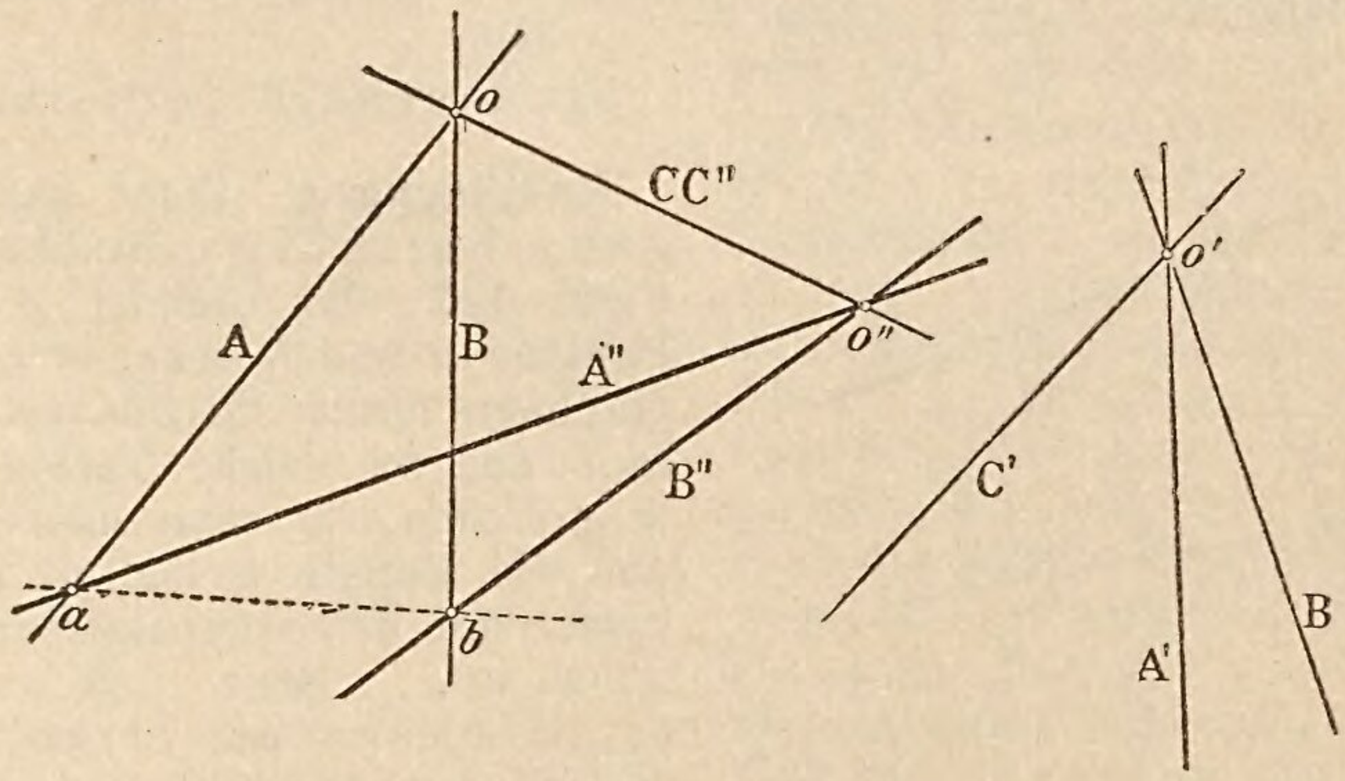
$$\overline{ce} = \frac{1}{3}\,\overline{cd}$$

Zieht man ebenso $e'c$ bis zum Schnitt γ'' mit $a'd$, so liefert die Verbindunglinie $\beta\gamma''$ auf cd einen Punkt f, so dass $\overline{cf} = \frac{1}{4}\,\overline{cd}$ ist. Durch n — 1malige Wiederholung der Konstruktion kann man daher den n^{ten} Teil der Strecke $\overline{ed}$ ermitteln.

Aufgabe 92. Zwei projektive Strahlbüschel $o\,(A, B, C \ldots)$ und o' $(A', B', C' \ldots)$ sind perspektivisch zu legen.

Auflösung. Man hat nur nötig das Strahlbüschel o' (A', B', C') so zu drehen und zu verschieben, dass der Strahl C' in den Strahl C fällt und daher o' etwa nach o'' auf C zu liegen kommt, das Strahlbüschel o' $(A', B', C' \ldots)$ kommt dann in die Lage o'' $(A'', B'', C'' \ldots)$ und dieses liegt mit $o\,(A, B, C \ldots)$ perspektivisch, siehe Erkl. 104a.

Figur 146.



Da der Punkt o'' auf A ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt, dass zwei projektive, in allgemeiner Lage befindlichen Strahlbüschel sich auf unendlich viele Arten perspektivisch legen lassen.

Anmerkung 18. Sind zwei Ebenenbüschel perspektivisch zu legen, so lässt sich dies in einfacher Weise bewerkstelligen, indem man beide Ebenenbüschel etwa senkrecht zu ihrer Achse durch Ebenen nach Strahlbüscheln schneidet und diese, wie in Aufgabe 92, perspektivisch legt. Die durch die Strahlen der so gewonnenen Strahlbüschel senkrecht zur Ebene der Strahlbüschel gelegten Ebenen bestimmen die gesuchten Ebenenbüschel in perspektivischer Lage.

Aufgabe 93. In zwei projektiven Strahl- (Ebenen-) Büscheln sind die entsprechenden Rechtwinkelpaare zu konstruieren.

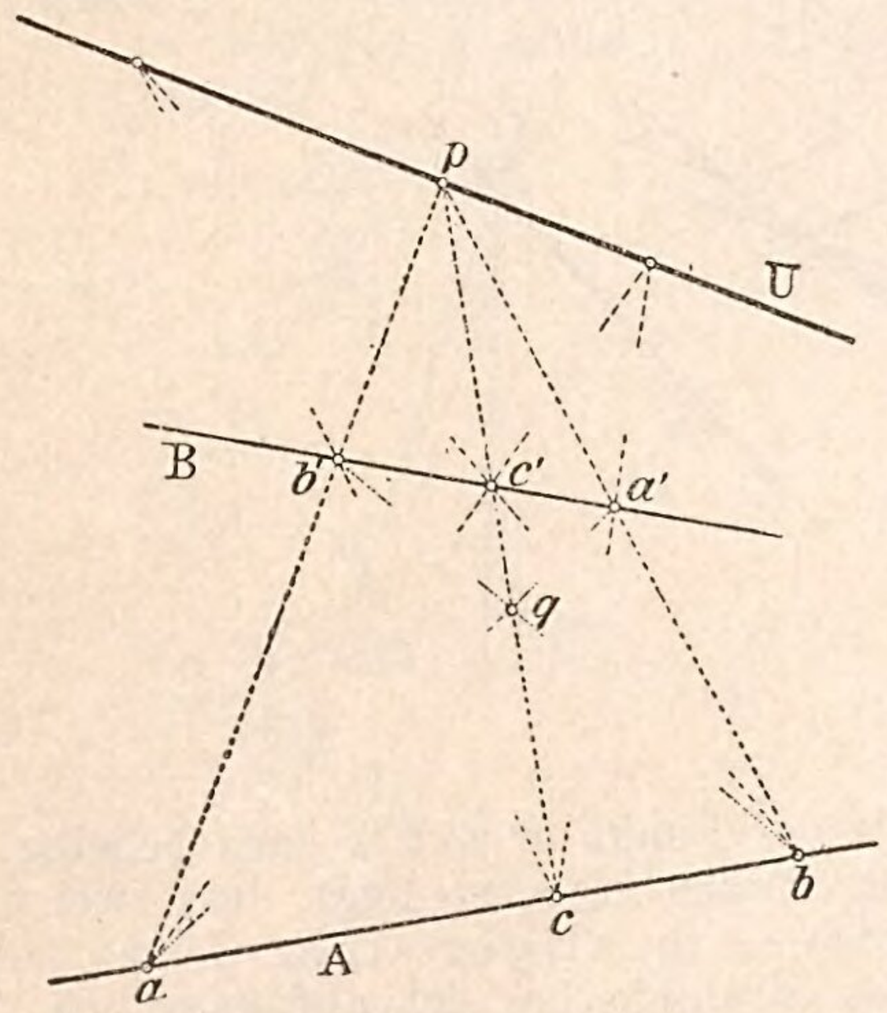
Auflösung. Man legt, siehe Aufgabe 92, die Büschel perspektivisch, bestimmt in dieser Lage die Rechtwinkelpaare und bringt hierauf die Büschel in ihre ursprüngliche Lage zurück.

Aufgabe 94. Ein Strahl- und ein Ebenenbüschel in allgemeiner Lage sind perspektivisch zu legen.

Auflösung. Die Aufgabe ist in Rücksicht auf Aufgabe 92, Anmerkung 18, einfach dadurch zu lösen, dass man statt des Ebenenbüschels durch einen Schnitt senkrecht zur Achse der letzteren eine Strahlbüschel wählt und beide Strahlbüschel perspektivisch legt.

Aufgabe 95. Durch einen gegebenen Punkt p nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden A und B ist eine Gerade zu zeichnen.

Figur 147.



Auflösung. Es sind zwei Fälle denkbar; der Punkt p kann nämlich

a) ausserhalb der beiden Geraden
oder
b) innerhalb derselben liegen.

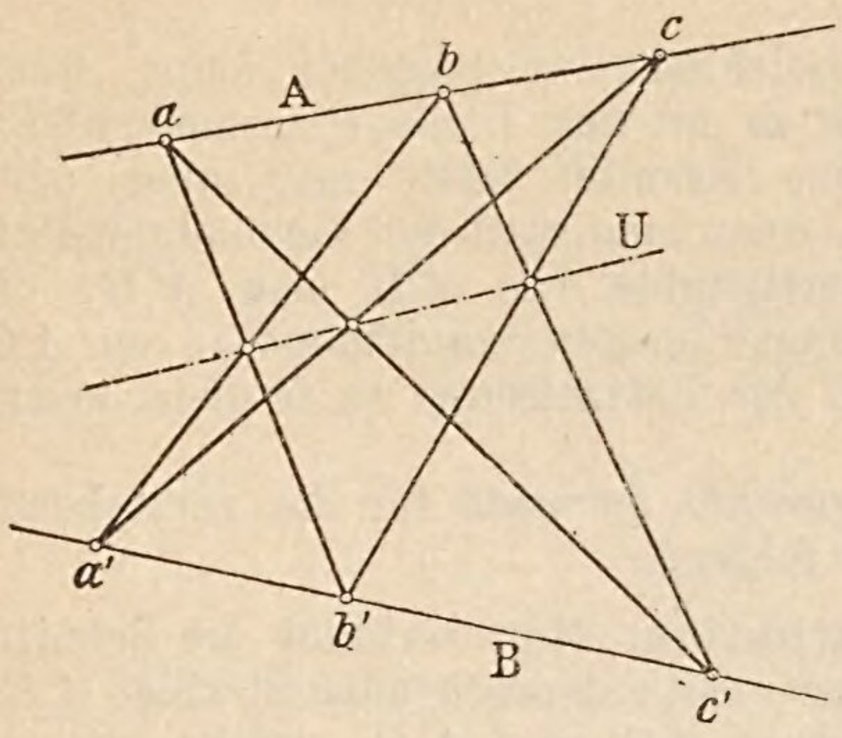
Auflösung a. Zieht man durch p zwei ganz beliebige Strahlen, welche, siehe Figur 147, die Geraden A und B in den Punkten a und b bezw. b' und a' schneiden, verbindet ferner die Punkte a und a', ebenso b und b', welche Verbindungslinien sich in q treffen, so kann man noch pq ziehen und die Punkte a und a' als Mittelpunkte zweier mit den perspektivischen Punktreihen a', b', c' . . . bezw. a, b, c . . . perspektivisch liegenden Strahlbüschel wählen, so sind diese Strahlbüschel, da sie den Strahl aa' gemeinsam haben, selbst in perspektivischer Lage und liefern einen den Punkt p, sowie den Schnittpunkt der beiden Geraden A und B enthaltenden perspektivischen Durchschnitt U als gesuchte Gerade.

Erkl. 161. Nimmt man die drei Punkte a, b, c auf der Geraden A, desgleichen die Punkte a', b', c' auf der Geraden B ganz willkürlich an, siehe Figur 149, und zieht die Linien ab', $a'b$, ac', $a'c$, bc', $b'c$, so schneiden sich dieselben gleichfalls auf einer Geraden U, welche aber nicht durch den Schnittpunkt von A und B hindurchgehen wird.

Das eben Gesagte lässt sich als Satz so ausdrücken:

„Liegen die Eckpunkte eines Sechsecks zu je dreien auf zweien Geraden A und B, so schneiden sich die drei Paar Gegenseiten in Punkten einer Geraden."

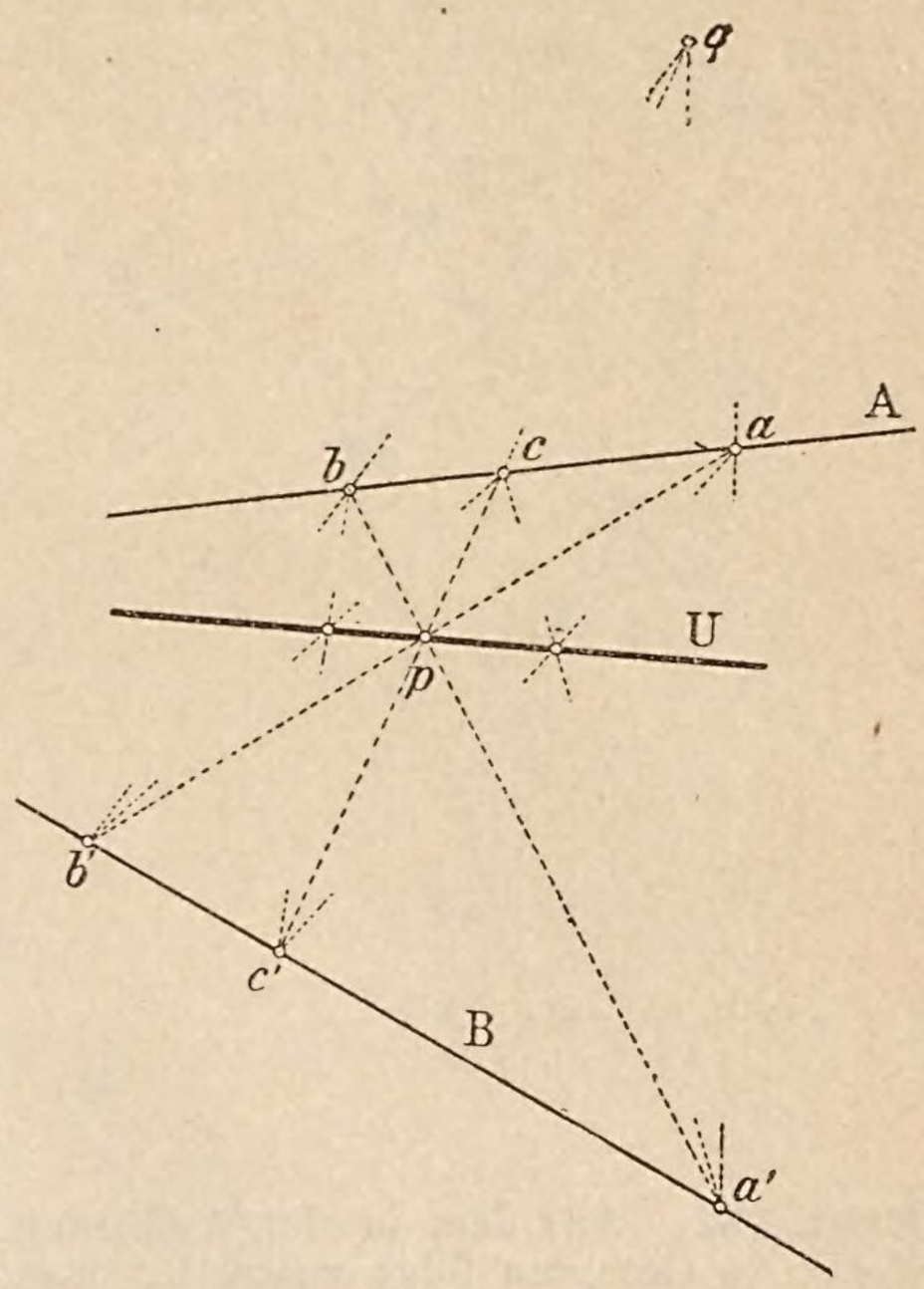
Figur 149.



Aufgabe 96. In zweien projektiven Strahlbüscheln in allgemeiner Lage soll zu einem Strahle D des einen Büschels der entsprechende Strahl D' im anderen Büschel konstruiert werden.

Auflösung b. Die Konstruktion bleibt ganz die nämliche wie im Fall a, siehe Figur 148.

Figur 148.

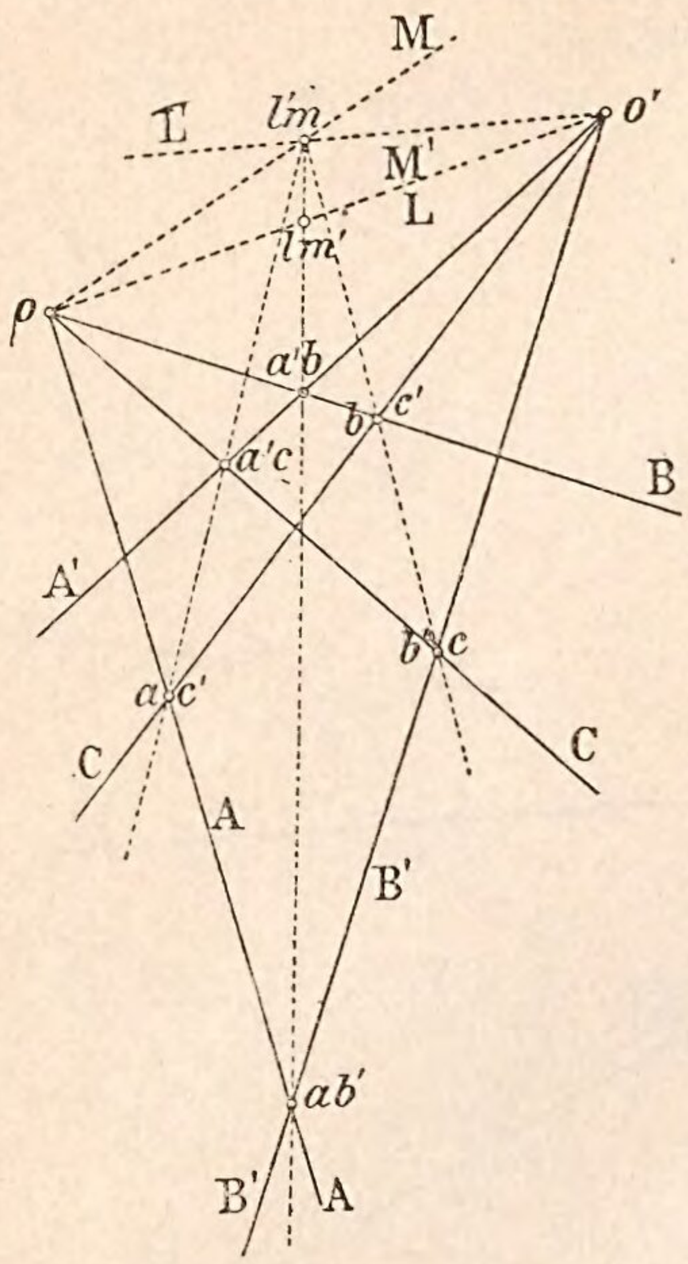


Auflösung. Die vorliegende Aufgabe hat bereits in der Antwort der Frage 69 eine Lösung gefunden, doch kann die Aufgabe auch noch auf eine andere Art gelöst werden.

Sind nämlich o (A, B, C . . .) und o' (A', B', C' . . .), siehe Figur 150, zwei projektive Strahlbüschel, so ist folgendes leicht einzusehen: „Bringt man nicht entsprechende Strahlenpaare, wie A, B', ebenso A', B, desgleichen A, C' und A', C zum Schnitt und nennt die Schnittpunkte ab', $a'b$, ac', $a'c$, so schneiden sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte von AB', $A'B$, AC', $A'C$ in einem Punkte, der für alle nicht entsprechenden Strahlenpaare, wie DE' und $D'E$ etc. derselbe bleibt."

Denn heisst die Verbindungslinie oo' als Strahl des einen Büschels L, als Strahl des anderen aber M, so entspricht dem ersten Strahle L ein Strahl L', dem Strahl M' dagegen ein Strahl M und beide Strahlen treffen die Verbindungslinie aa' oder bb' in den

Figur 150.



Erkl. 162. Aus dem in der Auflösung der Aufgabe 96 Gesagten folgt zugleich, dass die Verbindungslinie om bezw. ol' die der Verbindungslinie oo' entsprechenden Strahlen beider Büschel ergeben.

Punkten l' und m, während der Strahl $o\,o'$ oder $L\,M'$ auf genannter Linie den Punkt $l\,m'$ liefert.

Nun findet aber offenbar, zufolge der Projektivität der gegebenen Strahlbüschel, die Doppelverhältnisgleichheit statt:

$$(a\,b,\ l\,m) = (a'\,b',\ l'\,m')$$

oder in Rücksicht auf die Bezeichnung in der Figur 150

$$(a\,b,\ l\,m) = (b\,a,\ l'\,l)$$

woraus mit Bezugnahme auf die Antw. der Frage 59 folgt:

$$a\,b\,l\,m = (a\,b\,l\,l')$$

welche Gleichheit nur bestehen kann, wenn der Punkt m mit dem Punkt l' zusammenfällt.

Dasselbe Resultat hätte man aber auch erhalten, wenn man statt der Verbindungslinie der Schnittpunkte von $A\,B'$ und $A'\,B$, die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $A\,C'$ und $A'\,C$ der Betrachtung zu Grunde gelegt hätte.

Man gewinnt demnach für die vorstehende Aufgabe folgende

Konstruktion. Man verbinde die Schnittpunkte der nicht entsprechenden Strahlen $A\,B'$, $A'\,B$, ebenso $A\,C'$ und $A'\,C$, welche sich in einem Punkte $l'\,m$ treffen. Schneidet nun der Strahl D den Strahl C' in einem Punkt $d\,c'$, so liefert die Verbindungslinie $d\,l'\,m$ auf C einen Punkt $c\,d'$, durch welchen der Strahl D' hindurch geht.

Aufgabe 97. Zwei projektive Strahlbüschel o (A, B, C . . .) und o' (A', B', C' . . .) sind so perspektivisch zu legen, dass der perspektivische Durchschnitt parallel werde zur Verbindungslinie oo' ihrer Mittelpunkte.

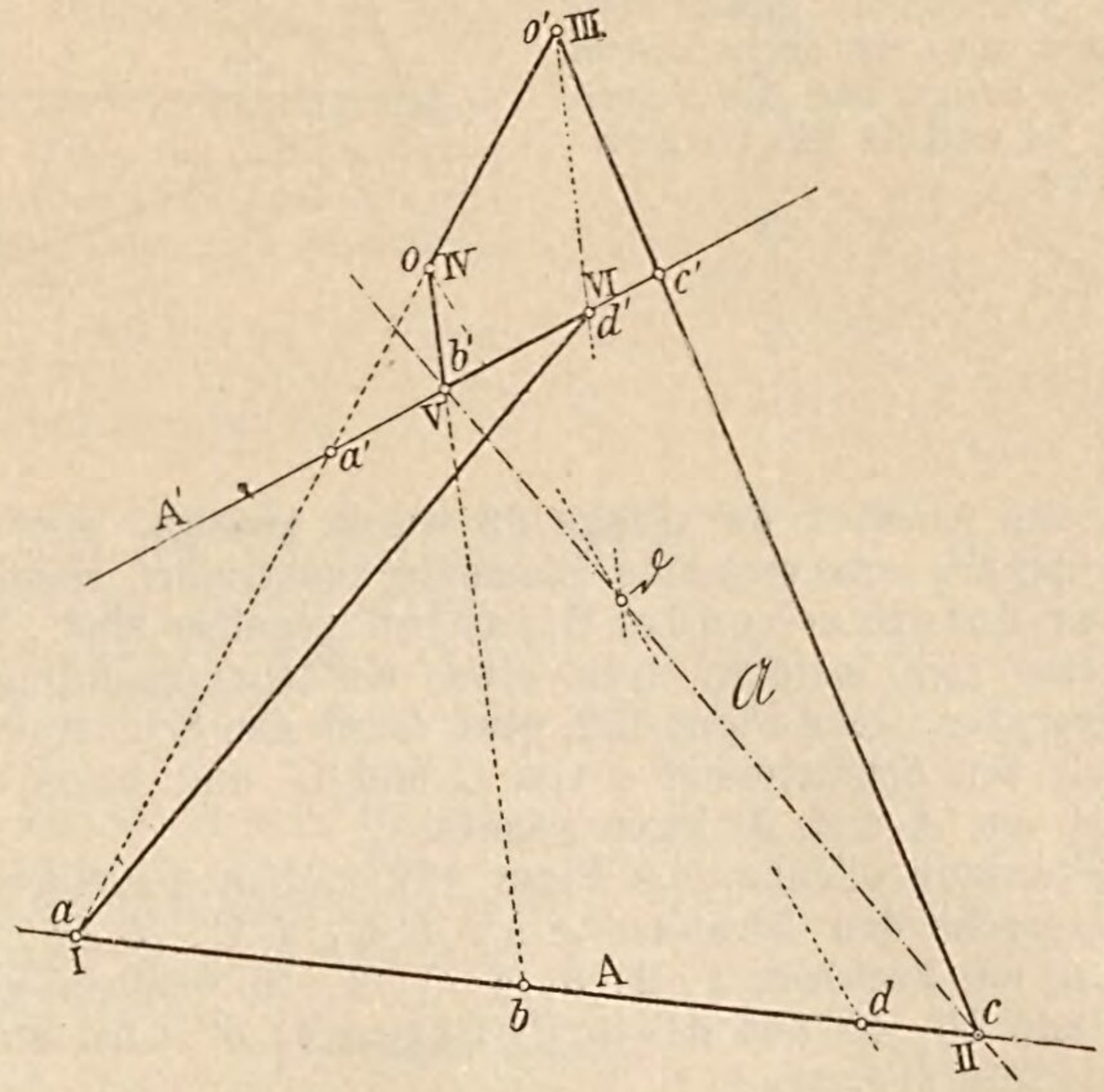
Auflösung. Man bringt die beiden Büschel zunächst überhaupt in perspektivische Lage. Ermittelt man nun in dieser Lage die entsprechenden Nullwinkel, siehe Antw. der Frage 81, so werden die Büschel die in der Aufgabe verlangte Lage einnehmen, sobald in der Verbindungslinie $o\,o'$ ihrer Mittelpunkte entweder die Strahlen GG' oder HH' zur Deckung gelangen.

Anmerkung 19. In der Antwort der Frage 68 wurde gezeigt, wie man in zweien projektiven Punktreihen entsprechende Elemente konstruiert, sobald die Punktreihen durch drei Paar entsprechender Punkte gegeben sind. Die dort angegebene Konstruktion liesse sich insoferne verallgemeinern, als die Mittelpunkte der mit den Punktreihen perspektivisch liegenden Strahlbüschel auf der Verbindungslinie eines Paares entsprechender Punkte ganz beliebig gewählt werden könnten; in dem oben

erwähnten Fall wurden sie der Einfachheit wegen zusammenfallend mit den Punkten a und a' angenommen.

Wählt man die genannten Mittelpunkte insbesondere so, dass der eine o, siehe Figur 151, im Schnitt von aa' und bb', der Mittelpunkt o' im Schnitt von aa' mit cc' liegt, so bleibt die Konstruktion des dem Punkte d entsprechenden Punkte d' genau dieselbe wie in Antwort der Frage 68. Die sechs Linien A, A', aa', bb', cc' und dd' bilden nun ein Sechsseit I bis VI, siehe Erkl. 163, in welchen sich die drei Hauptdiagonalen, siehe Erkl. 163, in dem nämlichen Punkte $\mathfrak{d}$ schneiden.

Figur 151.



Da nun die Punkte aa', bb', cc' drei ganz willkürlich gewählte Paare entsprechender Punkte darstellen, so kann man offenbar das Punktpaar aa' ersetzen durch ein anderes nn' und die oben erwähnte Konstruktion durchführen; die Punkte o und o' fallen dann zusammen mit dem Schnittpunkte von nn' und bb' bezw. cc', während die Linie $b'c$ dieselbe bleibt; auf ihr liegt auch im Schnitt von do der Punkt $\mathfrak{d}$. Ersetzt man nun nacheinander die Linie aa' oder nn' durch die Verbindungslinien anderer entsprechender Punktpaare, so bleiben die Punkte d und d' stets dieselben, die Linien $d\mathfrak{d}$ und $d'\mathfrak{d}$ beschreiben projektive Strahlbüschel in perspektivischer Lage mit dem perspektivischen Durchschnitt $\mathfrak{A}$ und diese Büschel erzeugen auf den festen Geraden bb' und cc' zwei unter sich projektive Punktreihen. Man erhält somit folgenden Satz:

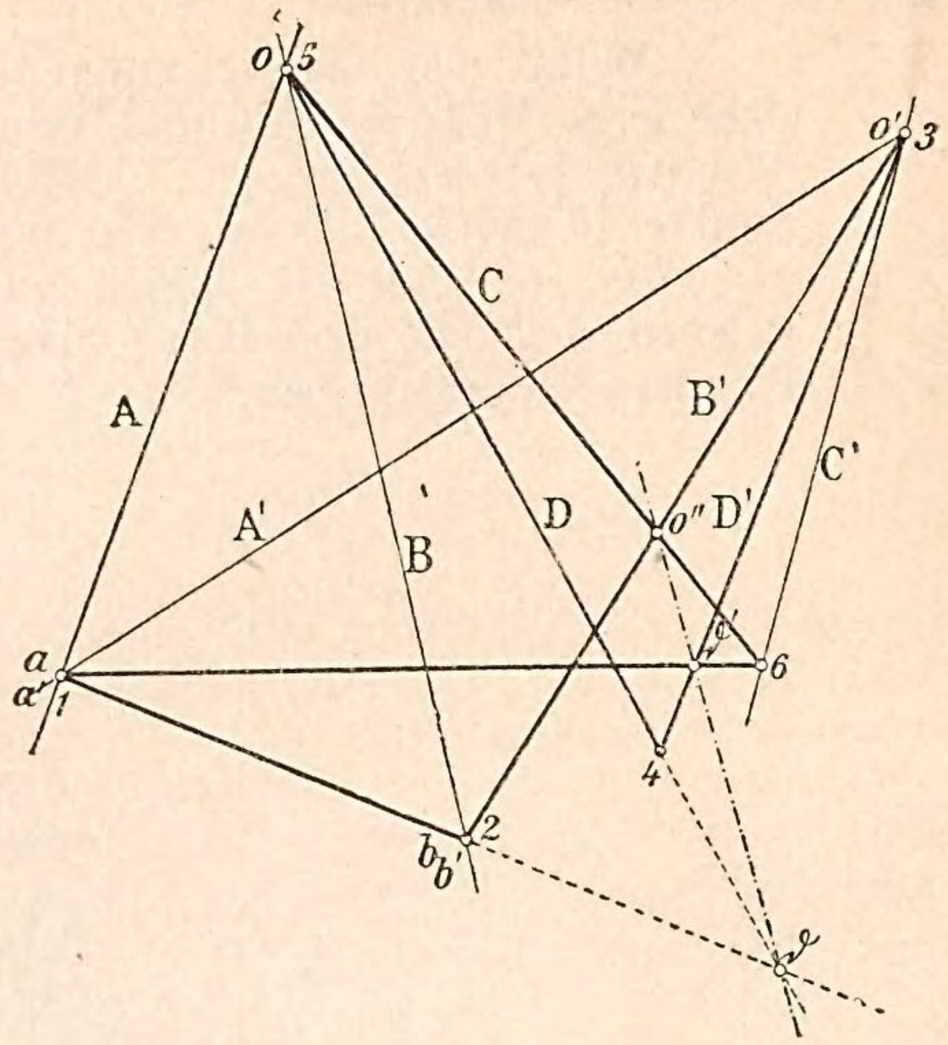
„Verbindet man in zweien projektiven Punktreihen in allgemeiner Lage sämtliche entsprechende Punktpaare und wählt unter diesen Verbindungslinien irgend zwei derselben aus, so werden diese von den übrigen Verbindungslinien wieder in projektiven Punktreihen getroffen.“

„Irgend sechs der Verbindungslinien entsprechender Punktpaare zweier projektiven Punktreihen bilden ein Sechsseit, in welchem sich die drei Hauptdiagonalen in einem festen Punkte schneiden. Ein solches Sechsseit heisst ein „Brianchon'sches Sechsseit und der genannte feste Punkt ein Brianchon'scher Punkt“, siehe Erkl. 165a.

Erkl. 163. Sechs Gerade der Ebene bilden ein Sechsseit. Bezeichnet man die Schnittpunkte auf einander folgender Seiten mit I, II ... VI . . ., so nennt man die Ecken I, IV, II, V, und III VI die Gegenecken und die Verbindungslinien dieser Gegenecken I IV, II V und III VI die Hauptdiagonalen des Sechsseits.

Erkl. 164. Irgend sechs Punkte der Ebene mit einander verbunden bilden ein Sechseck. Bezeichnet man die sechs Ecken mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so nennt man die Seiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 die Gegenseiten des Sechsecks.

Figur 152.



Anmerkung 20. In der Antwort der Frage 69 wurde gezeigt, wie man in zweien projektiven Strahlbüscheln entsprechende Elemente konstruiert, sobald die Strahlbüschel durch drei Paar entsprechender Strahlen gegeben sind. Die dort angegebenn Konstruktion liesse sich insofern noch etwas einfacher gestalten, als man die eine der beiden Hilfsgeraden, siehe Figur 152, etwa durch den Schnittpunkt b von B und B', die andere durch den Schnittpunkt c von C und C' und beide überdies durch den Schnittpunkt aa' von A und A' legen könnte.

Man erhielte dann offenbar die Figur 152 und in derselben bilden die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen AA', BB', CC', DD' im Verein mit den Punkten o und o' ein Sechseck 1, 2, 3, 4, 5, 6, in welchen sich die Gegenseiten 12 und 45, 23 und 56, 45 und 61 in Punkten $\mathfrak{d}$, o'' und $\mathfrak{d}'$ schneiden, die auf einer Geraden liegen.

Wählt man statt des Strahlenpaares CC' irgend ein anderes entsprechendes Strahlenpaar, etwa NN' aus und vollzieht die vorstehend angegebene Konstruktion für den dem Strahle D entsprechenden Strahl D', so muss sich selbstverständlich für letzteren stets der nämliche Strahl D' ergeben. Lässt man demnach das Strahlenpaar CC' die ganze Strahlenreihe in dem zugehörigen Strahlbüschel durchlaufen, so ändern sowohl die Gerade $a\mathfrak{d}'$ als auch die Gerade $\mathfrak{d}o''$ ihre Lage und beschreiben je ein Strahlbüschel und beide Strahlbüschel befinden sich in perspektivischer Lage mit der Geaden D' als perspektivischen Durchschnitt. Desgleichen sind auch die durch die Strahlen C und $\mathfrak{d}o''$ beschriebenen Strahlbüschel perspektivisch mit der Geraden B' als perspektivischen Durchschnitt, woraus unmittelbar die Projektivität der von den Geraden C und $a\mathfrak{d}'$ beschriebenen Strahlbüschel hervorgeht.

Man erhält somit folgende Sätze:

„Konstruiert man die sämtlichen Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projektiven Strahlbüschel und wählt von den Schnittpunkten irgend sechs derselben aus, so sind die Doppelverhältnisse der zweimal vier Strahlen, welche von zweien der sechs Punkte nach den übrigen vier Punkten gezogen werden können, einander gleich."

„Irgend sechs der Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen zweier projektiven Strahlbüschel bilden ein Sechseck, in welchem die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten auf einer geraden Linie liegen.

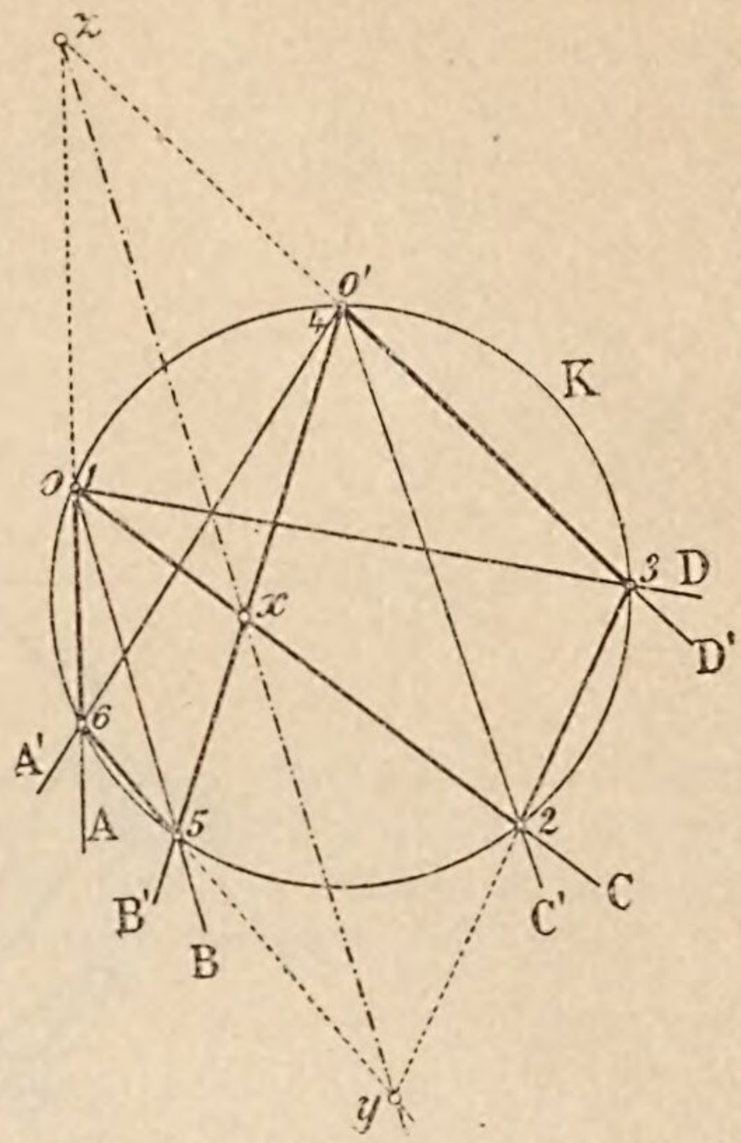
Ein solches Sechseck heisst ein „Pascal'sches Sechseck und die genannte gerade Linie eine Pascal'sche Linie, siehe Erkl. 165a".

Erkl. 165. Auf Grund des Vorangegangenen erkennt man nun leicht folgendes: Verbindet man die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiv gleicher Strahlbüschel, so gehören diese Schnittpunkte a, b, c, d einer Kreislinie K an, denn infolge der Gleichheit der Winkel $A\hat{}B$ und $A'\hat{}B$ liegen die Punkte 6, 5, o, o' auf einem Kreisbogen, welchem auch die Punkte 2 und 3 angehören, denn es ist ja auch $A\hat{}C = A'\hat{}C'$, $A\hat{}D = A'\hat{}D'$. Wegen der Projektivität der Büschel sind nun aber auch die Doppelverhältnisse (AB, CD) und $(A'B', C'D')$ einander gleich, woraus in Rücksicht auf den Inhalt der Anmerkung 20 folgt, dass die Punkte o, o', 6, 5, 2, 3 ein Pascal'sches Sechseck bilden, in welchen die Durchschnittspunkte x, y und z der drei Gegenseitenpaare auf einer Geraden, der Pascal'schen Linie, liegen. Das eben Gesagte lässt sich in anderer Form als Satz so aussprechen:

„Zwei projektiv gleiche Strahlbüschel erzeugen durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlenpaare stets eine Kreislinie."

„Irgend sechs Punkte einer Kreislinie bilden ein Pascal'sches Sechseck, in welchem die Durchschnittspunkte in drei Gegenseitenpaare auf einer geraden Linie sich befinden.

Figur 153.



Erkl. 165a. Die Bezeichnungen Brianchon'sches Sechsseit bezw. Pascal'sches Sechseck rühren von den Entdeckern der genannten Sätze, den Mathematikern Brianchon und Pascal (1623—1662) her.

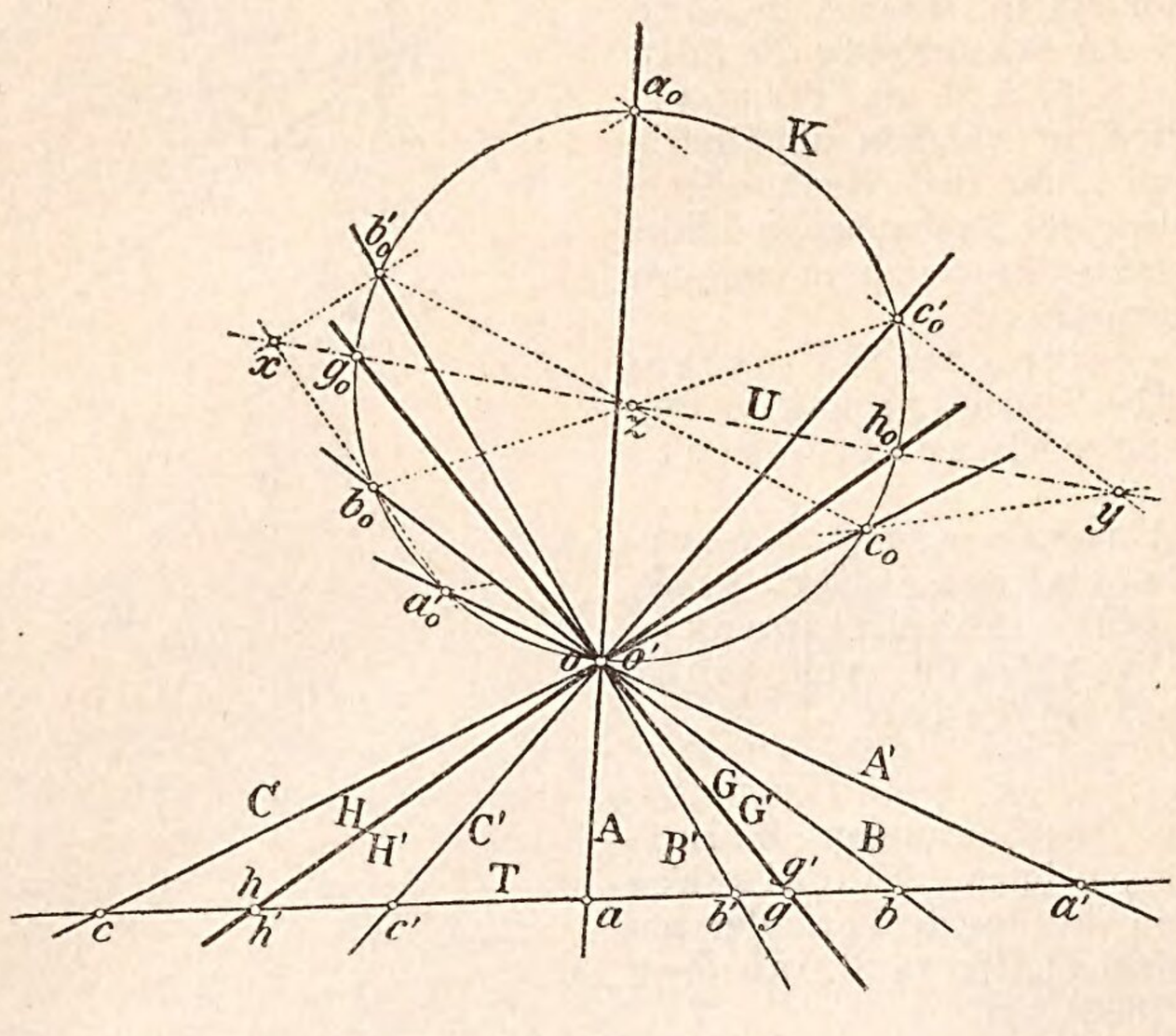
Aufgabe 98. In zweien gegebenen concentrischen Strahlbüscheln $o(A, B, C \ldots)$, $o'(A', B', C' \ldots)$, siehe Figur 154, sind die Doppelstrahlen zu konstruieren.

Auflösung. Man lege durch den gemeinsamen Mittelpunkt oo' beider Strahlbüschel eine beliebige Kreislinie K, welche die Strahlen beider Büschel beziehungsweise in den Punkten $a_0, b_0, c_0 \ldots, a_0', b_0', c_0' \ldots$ schneidet. Die Verbindungslinien $a_0 b_0' a_0' b_0$, $a_0 c_0'$, $a_0' c'$, $b_0 c'_0$, $b_0' c_0$ schneiden sich in den Punkten x, y und z einer Geraden U, welche den Kreis K in zweien Punkten g_0, h_0 schneidet, durch welche die Doppelstrahlen G und H beider Büschel hindurchgehen.

Denn nimmt man den Punkt a_0 als Mittelpunkt eines Strahlbüschels, dessen Strahlen durch die Punkte a_0', b_0', c_0' hindurchgehen, so ist dieses Büschel projektiv mit dem Büschel $o'(A', B', C' \ldots)$, siehe Erkl. 165. Nimmt man ebenso den Punkt a_0' als Mittelpunkt eines Büschels, dessen Strahlen durch die Punkte a_0, b_0, c_0 hindurchgehen, so ist dieses Büschel projektiv mit dem Büschel $o(A, B, C \ldots)$. Hieraus folgt aber unmittel-

bar die Projektivität der beiden Büschel $a_0\,(a_0', b_0', c_0' \ldots)$ und $a_0'\,(a_0, b_0, c_0 \ldots)$. Diese Büschel befinden sich aber in perspektivischer Lage, da sie den Strahl $a_0\,a_0'$ gemeinsam besitzen und ihr perspektivischer Durchschnitt ist die Gerade $x\,y\,z$. Demnach gehören die Strahlen $o\,g_0$ und $o\,h_0$ beiden Büscheln $o\,(A, B, C \ldots)$ und $o'(A', B', C' \ldots)$ gemeinsam an.

Figur 154.

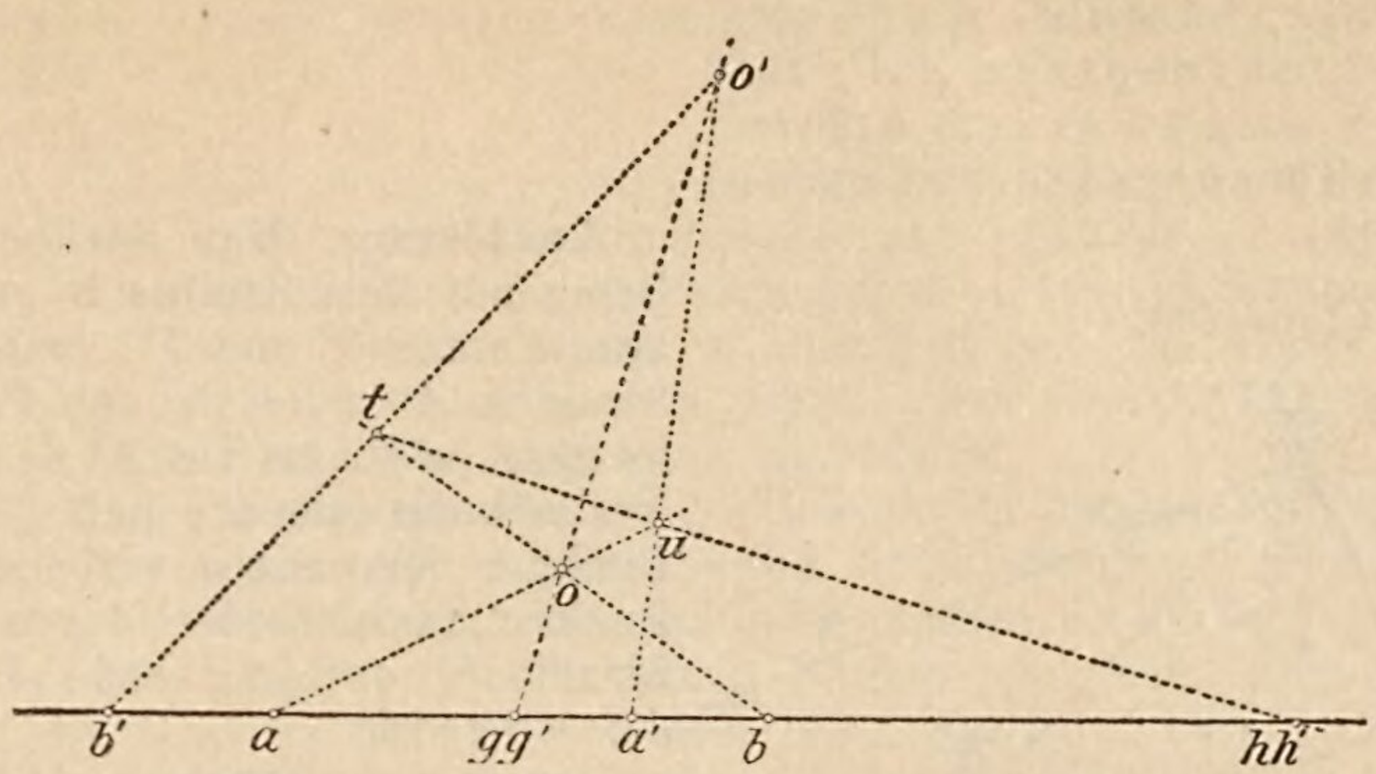


Anmerkung 21. Mit obiger Aufgabe ist auch die Aufgabe: „In zweien projektiven aufeinanderliegenden Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $a', b', c' \ldots$ sind die Doppelpunkte zu konstruieren“ gelöst. Denn man braucht ja nur diese Punktreihen mittels eines beliebig gewählten Punktes o mit zweien concentrischen Strahlbüscheln perspektivisch zu legen und wie in Aufgabe 98 zu verfahren: Je nachdem die Gerade U die Kreislinie in zweien Punkten schneidet oder berührt oder gar nicht schneidet, besitzen die gegebenen Strahlbüschel bezw. Punktreihen zwei Doppelelemente oder nur ein Doppelelement oder keines.

Aufgabe 99. In zweien projektiven aufeinanderliegenden Punktreihen (concentrischen Strahlbüscheln) ist ein Doppelelement gegeben. Es ist das zweite zu konstruieren.

Auflösung. Ist die eine Punktreihe durch a, b, g, die andere durch a, b, g', wobei g' mit g zusammenfällt, gegeben, so ziehe man durch $g\,g'$ eine beliebige Gerade, wähle auf ihr die beiden Punkte o und o' beliebig und verbinde sie mit den Punktreihen zu Strahlbüscheln, so liegen letztere, da sie den Strahl $o\,o'$ gemeinsam haben, perspektivisch und ihr perspektivischer Durchschnitt $t\,u$ liefert auf $A\,A'$ den zweiten Doppelpunkt $h\,h'$ er gegebenen Punktreihen.

Figur 155.



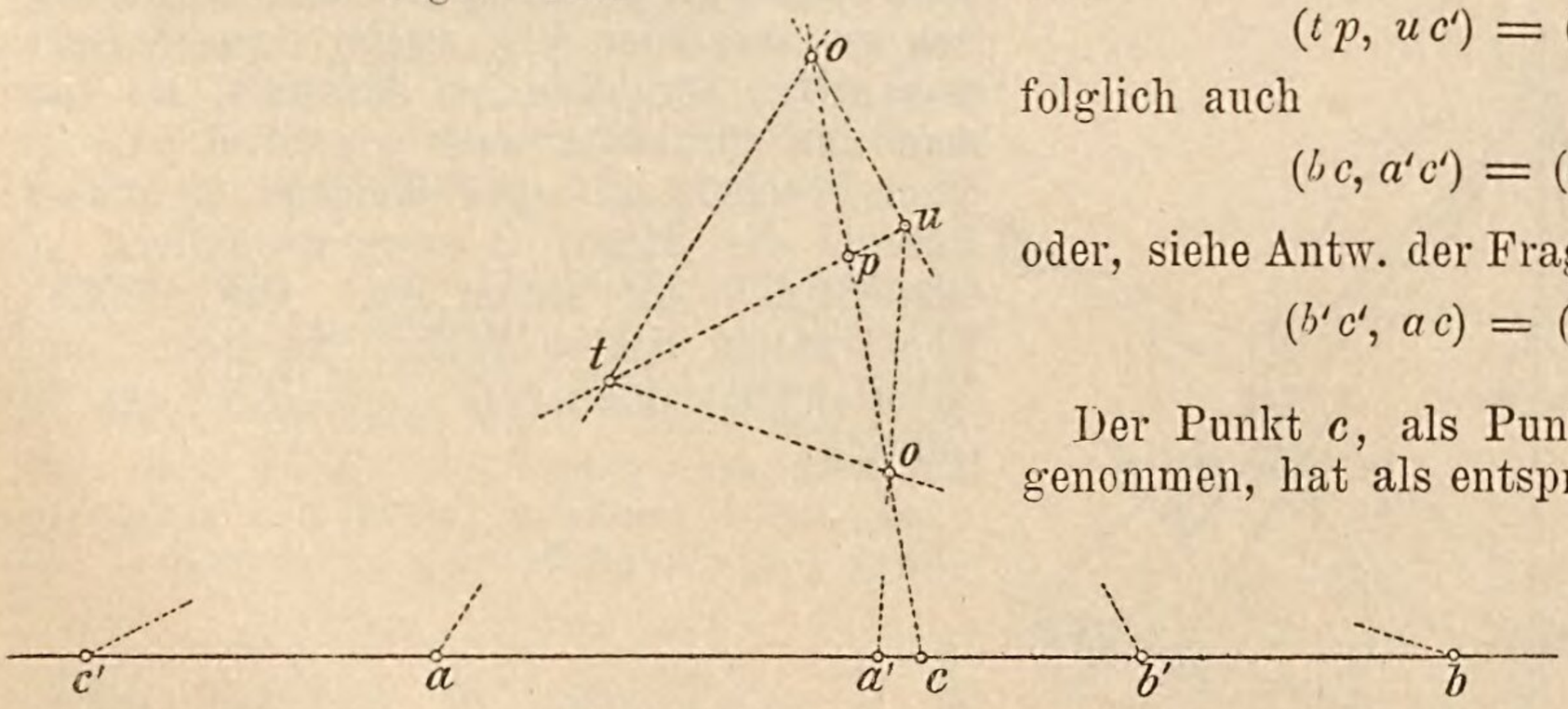
Sind zwei concentrische Strahlbüschel und ein Doppelstrahl derselben gegeben, so schneide man die beiden Büschel durch eine Gerade und verfahre wie oben.

Aufgabe 100. Von einem involutorischen geraden Gebilde sind zwei conjugierte Punktpaare $a\,a'$, $b\,b'$ gegeben. Man soll zu einem dritten Punkte c' den conjugierten Punkt c konstruieren.

Erkl. 166. Die vier Punkte o, o', t, u bilden ein vollständiges Viereck, für welches mit Bezugnahme auf Auflösung der Aufgabe 100 folgender Satz besteht:

„In einem vollständigen Viereck schneidet irgendeine Transversale die drei Paar Gegenseiten nach conjugierten Punktpaaren einer Involution."

Figur 155a.



Auflösung. Man ziehe durch c, siehe Figur 155a, eine beliebige Gerade, wähle auf ihr die Punkte o und o' willkürlich und verbinde den Punkt o mit a' und b, den Punkt o' mit a und b'. Die Linien $o\,b$ und $o'\,a$, ebenso $o\,a'$ und $o'\,b'$ schneiden sich in Punkten t und u, deren Verbindungslinie den Punkt c' enthält.

Denn heisst p der Schnittpunkt von $o\,o'$ und $t\,u$, so ist zunächst

$$(t\,p,\ u\,c') = (b\,c,\ a'\,c')$$

und

$$(t\,p,\ u\,c') = (a\,c,\ b'\,c')$$

folglich auch

$$(b\,c,\ a'\,c') = (a\,c,\ b'\,c')$$

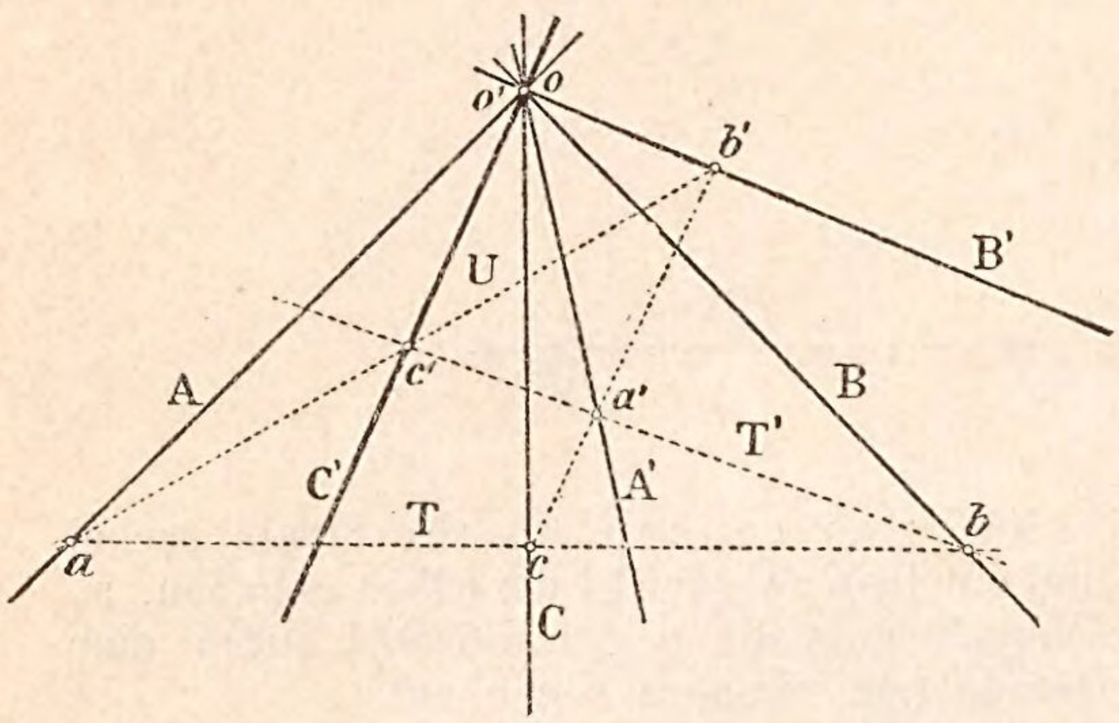
oder, siehe Antw. der Frage 59, Gleichung 37:

$$(b'\,c',\ a\,c) = (b'\,c',\ a\,c)$$

Der Punkt c, als Punkt der ersten Reihe genommen, hat als entsprechenden Punkt den Punkt c'; wird aber c' als Punkt der ersten Reihe genommen, so entspricht ihm in der zweiten der Punkt c. Die Punkte $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ bilden demnach zusammengehörige Punktpaare einer Involution.

Aufgabe 101. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei conjugierte Strahlenpaare AA', BB' gegeben. Man soll zu einem dritten Strahle C den ihm conjugierten Strahl C' konstruieren.

Figur 156.



Erkl. 167. Die vier Geraden T, T', $b'a$ und $b'c$ bilden ein vollständiges Vierseit, für welches somit mit Bezugnahme auf die Auflösung der Aufgabe 101 folgender Satz besteht:

„In einem vollständigen Vierseit bilden die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes in der Ebene des Vierseits mit den drei Paar Gegenecken conjugierte Strahlenpaare einer Involution."

Auflösung. Man zeichne durch einen beliebig auf dem Strahle B gewählten Punkt b zwei Cerade T und T'; erstere schneidet die Strahlen A und C in den Punkten a und c, letztere bestimmt auf A' den Punkt a'. Die Verbindungslinie $a'c$ liefert nun auf B' einen Punkt b', der mit a verbunden auf T' einen Punkt c' ausschneidet, durch welchen der dem Strahle C conjugierte Strahl C' hindurchgeht.

Denn die vier Strahlen A, U, aa', T schneiden sich mit den vier Strahlen A, C', A' und B auf der Geraden T', desgleichen mit den vier Strahlen A, B', A' und C auf der Geraden $b'c$, wodurch folgende Doppelverhältnisgleichheiten begründet sind:

$$(AU\ aa'T) = (\underline{AC',\ A'B}) = (AB',\ A'C)$$

oder

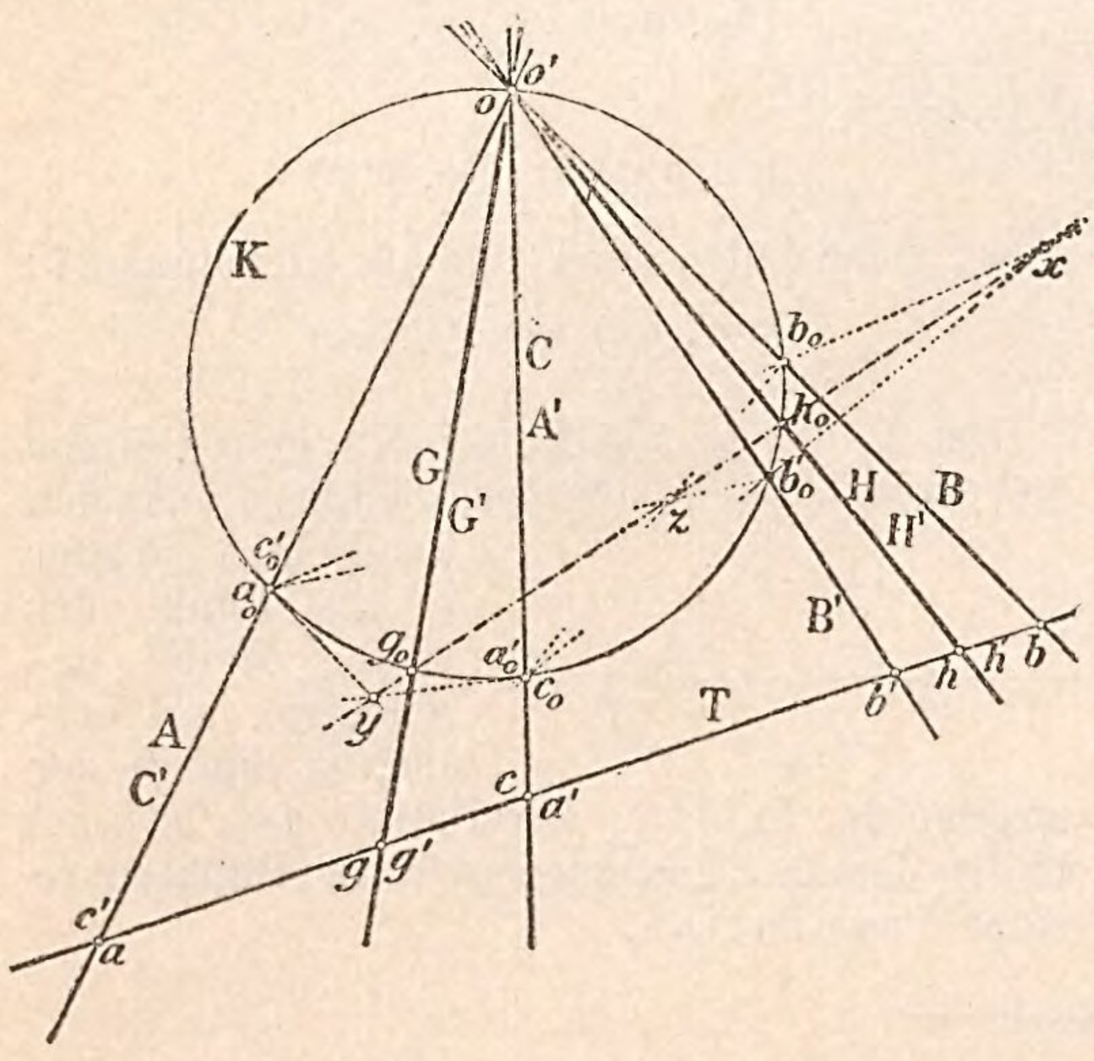
$$(A'C',\ AB) = (AC,\ A'B')$$

siehe Antw. der Frage 59, Gleichung 37,

woraus aber folgt, dass die Strahlen AA', BB', CC' einem involutorischen Strahlenbüschel angehören.

Aufgabe 102. Von einem involutorischen Strahlenbüschel sind zwei conjugierte Strahlenpaare AA', BB', gegeben. Man soll die Doppelstrahlen der Involution konstruieren.

Figur 157.



Auflösung. Die Aufgabe lässt sich in gleicher Weise lösen, wie die Aufgabe 98, denn da das involutorische Strahlbüschel lediglich ein spezieller Fall zweier concentrischen projektiven Strahlbüschel darstellt, so kann man den Strahl A auch als Strahl C' des einen Büschels auffassen, welchem im anderen Büschel der Strahl C zusammenfallend mit dem Strahle A' entspricht. Die nämliche Konstruktion wie in Aufgabe 98 liefert dann die Doppelstrahlen GG' und HH' der Involution.

Anmerkung 22. Selbstverständlich ist hiermit auch die Aufgabe gelöst: „Es sind die Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe zu ermitteln," siehe Anmerkung 21.

Anmerkung 23. Hat man zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage und verbindet die entsprechenden Punktpaare mit einander, so werden diese Verbindungslinien nicht mehr durch einen gemeinsamen Punkt hindurchgehen, sondern eine krumme Linie umhüllen, d. h. Tangenten an diese Linie bilden. Mittels des Vorangegangenen ist es nun leicht, über die Ordnung bezw. Klasse dieser Kurve, siehe Erkl. 168, Aufschluss zu erhalten.

Verbindet man nämlich die Punkte der beiden Punktreihen mit einem beliebigen Punkte der Ebene zu zweien concentrischen Strahlbüscheln, so besitzen dieselben höchstens zwei Doppelstrahlen, und diese werden die Träger der beiden Punktreihen in zweien Paaren entsprechenden Punkte schneiden, also gleichfalls Tangenten an die fragliche Ortskurve bilden. Von einem Punkte der Ebene sind also nur zwei Tangenten an die Ortskurve möglich, d. h. dieselbe ist eine Kurve zweiter Klasse, siehe Erkl. 168.

Hat man in gleicher Weise zwei projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage, so bilden die Schnittpunkte entsprechender Strahlen nicht mehr eine gerade, sondern eine krumme Linie, und es frägt sich, welcher Ordnung gehört diese Linie an. Auch diese Frage lässt sich nunmehr in einfacher Weise beantworten.

Schneidet man nämlich die beiden gegebenen Strahlbüschel durch eine Transversale, so entstehen auf derselben zwei aufeinanderliegende projektive Punktreihen, deren Doppelpunkte verbunden mit den Mittelpunkten der gegebenen Büschel als Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare, d. h. als Punkte der Ortskurve aufgefasst werden können, diese kann somit nur eine Kurve zweiter Ordnung sein, siehe Erkl. 168.

Aus Vorstehendem folgen aber die nachstehenden Sätze:

„Das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen in allgemeiner Lage ist eine Kurve zweiter Klasse, welche die Verbindungslinien entsprechender Punkte und deren Träger zu Tangenten hat," siehe Erkl. 169.

„Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel in allgemeiner Lage ist eine Kurve zweiter Ordnung, welcher auch die Mittelpunkte beider Büschel angehören," siehe Erkl. 170.

Erkl. 168. Unter der Klasse einer ebenen Kurve versteht man die höchste Anzahl der Tangenten, welche von einem Punkte ausserhalb der Kurve an letztere möglich sind.

Unter der Ordnung einer Kurve versteht man die höchste Anzahl der Schnittpunkte, welche eine Gerade mit der Kurve gemeinsam haben kann.

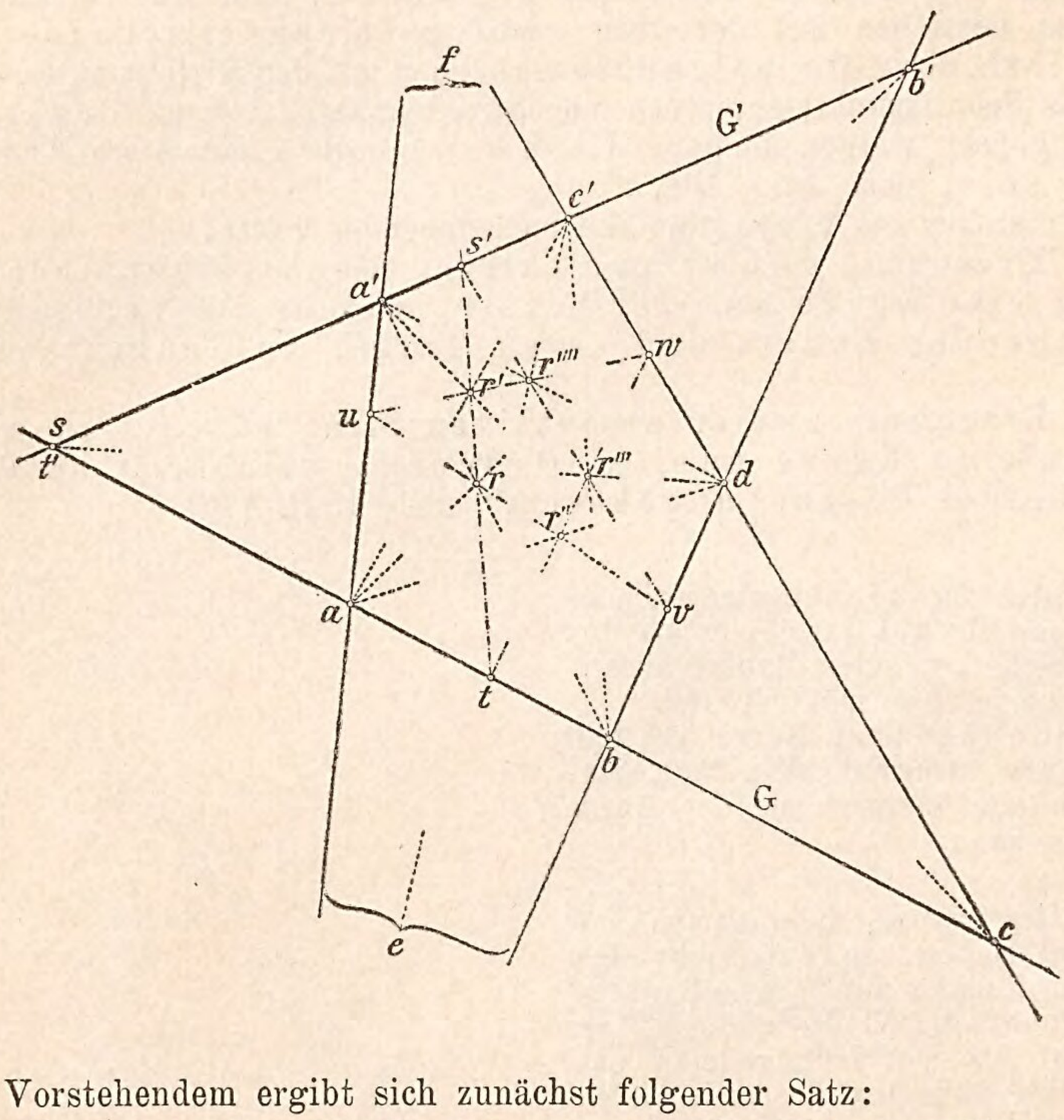
Erkl. 169. Heisst st' der Schnittpunkt der Träger der Punktreihen, so entspricht dem Punkte s auf G der Punkt s' auf G', dem Punkte t' auf G' aber der Punkt t auf G. Die beiden Träger sind somit selbst als Verbindungslinien entsprechender Punkte aufzufassen, somit gleichfalls Tangenten an die genannte Kurve zweiter Klasse.

Erkl. 170. Der Verbindungslinie oo' der Mittelpunkte beider Strahlbüschel entspricht in jedem Strahlbüschel ein von oo' verschiedener Strahl; es sind somit die Mittelpunkte beider Büschel selbst als Schnittpunkte entsprechender Strahlen aufzufassen und gehören demgemäss gleichfalls der Ortskurve zweiter Ordnung an.

Anmerkung 24. Sind G und G' die Träger zweier projektiven Punktreihen in allgemeiner Lage, siehe Figur 158, so bilden nach Anmerkung 23 die Verbindungslinien entsprechender Punkte die Tangenten einer Linie zweiter Klasse. Bestimmt man nun die dem Schnittpunkte st' beider Träger entsprechenden Punkte s' bezw. t auf G' und G, so bilden die Punkte s' und t Berührpunkte der Tangenten G' und G mit der fraglichen Kurve, und die Verbindungslinie ts' ist die Berührsehne.

Nimmt man nun etwa die Verbindungslinien aa' und bb' als Träger der projektiven Punktreihen, so bilden die Punkte $a'b'$ ebenso ab je ein Paar entsprechender Punkte und dem Schnittpunkt c der Linien aa' und bb' entspricht auf aa' und bb' der Punkt u bezw. v als Berührpunkt der Tangenten aa' und bb' mit der Kurve. Die beiden Berührsehnen $s't$ und uv schneiden sich offenbar im Schnittpunkt r der Strahlen ab' und $a'b$. Hält man nun die Tangente aa' fest und wählt statt der Tangente bb' irgend eine andere Verbindungslinie entsprechender Punkte der Punktreihen auf G und G', so geht die Verbindungslinie uv stets durch den Punkt u und die Linie uv beschreibt ein Strahlbüschel, das perspektivisch liegt mit dem von den Strahlen $a'b$ oder ab' beschriebenen Strahlbüscheln mit der Linie st als perspektivischem Durchschnitt. Da die letzteren Strahlbüschel aber perspektivisch liegen mit den Punktreihen auf G bezw. G', so ist der Strahlbüschel uv projektiv zu diesen Punktreihen.

Figur 158.



Aus Vorstehendem ergibt sich zunächst folgender Satz:

„Zieht man von einem Punkte v nach allen übrigen Punkten $s', t, v \ldots$ einer Linie zweiter Klasse Strahlen, so bilden dieselben ein Strahlbüschel, das projektiv ist zu den beiden Punktreihen, welche die Tangenten in den Punkten $s', t, v \ldots$ auf zweien festen Tangenten der Kurve aus schneiden."

Hält man nun die beiden Tangenten aa' und bb' fest und zieht von ihren Berührpunkten uv nach allen übrigen Punkten der Linie zweiter Klasse, so entstehen hierdurch zwei projektive Strahlbüschel, deren entsprechenden Strahlen in den Punkten der Kurve sich schneiden, aus welcher Eigenschaft der folgende wichtige Satz sich ergibt:

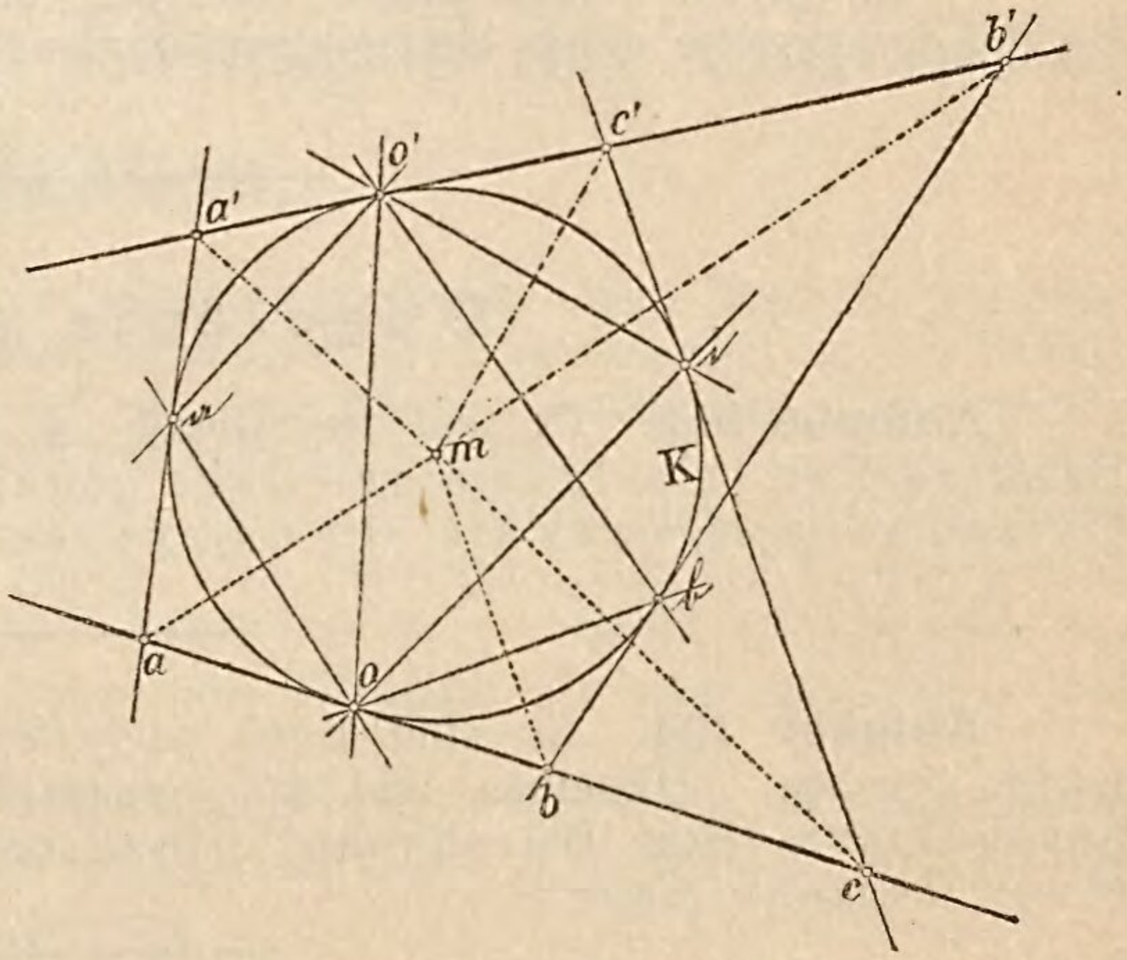
„Das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen ist zugleich das Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel.“ Mit anderen Worten: „Jede Kurve zweiter Klasse ist zugleich eine Kurve zweiter Ordnung.“

Erkl. 171. Auf Grund des in Anmerkung 23 Angeführten ist man im Stande, die Berührpunkte aller übrigen Tangenten in einfacher Weise zu ermitteln, sobald eine der Berührsehnen konstruiert ist. Denn kennt man z. B. die Berührsehne $s't$, so liefern die Verbindungslinien $a'd$ und $c'e$ den Punkt r'''' und dessen Verbindung mit r die Berührsehne uw. Die Linie $s'r''''$ ist zugleich Berührsehne $s'v$ für die Tangenten G' und bb' und schneidet die Linie sd in einem Punkte r''', durch welchen die Berührsehne wt hindurchgeht. Die Verbindungslinie uv endlich ist Berührsehne für die Tangenten aa' und bb' und enthält zugleich die Schnittpunkte r'' und r von ad und wt, desgleichen von $s't$ und ab'.

Anmerkung 25. Zu den in den Anmerkungen 23 und 24 aufgestellten Sätzen hätte man auch in folgender Weise gelangen können:

Ist K eine Kreislinie, so kann dieselbe erzeugt werden durch zwei projektiv gleiche Strahlbüschel, etwa $o(o\mathfrak{a}, o\mathfrak{b}, o\mathfrak{c}\ldots)$ und $o'(o'\mathfrak{a}, o'\mathfrak{b}, o'\mathfrak{c}\ldots)$, siehe Figur 159. Zieht man nun in den Punkten o, o', $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Tangenten an die Kreislinie und treffen etwa die Tangenten in den Punkten o und o' jene in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in den Punkten a, b, c und a', b', c', so ist die Projektivität der Punktreihen $(a, b, c\ldots)$ und $(a', b', c'\ldots)$ unmittelbar ersichtlich; denn verbindet man den Kreismittelpunkt m mit den Punkten a, b, c, so entsteht ein mit dem Strahlbüschel $o(o\mathfrak{a}, o\mathfrak{b}, o\mathfrak{c}\ldots)$ gleiches und somit projektives Strahlbüschel $m(ma, mb, mc\ldots)$. In gleicher Weise ist auch das Strahlbüschel $o'(o'\mathfrak{a}, o'\mathfrak{b}, o'\mathfrak{c}\ldots)$ gleich und projektiv dem Strahlbüschel $m(ma', mb', mc'\ldots)$, somit sind auch die Punktreihen $a, b, c\ldots$ und $a', b', c'\ldots$ unter einander projektiv. Es gilt demnach folgender Satz: „Irgend zwei Tangenten eines Kreises werden von den übrigen Kreistangenten nach Punkten zweier projektiven Punktreihen getroffen.“

Figur 159.



Projiziert man die Kreislinie K samt den sie hervorbringenden Punktreihen und Strahlbüscheln in eine beliebige Ebene E, so werden die genannten Strahlbüschel und Punktreihen als Centralprojektionen wieder Strahlbüschel und Punktreihen haben und deren Erzeugnis K' wird eben die Centralprojektion der Kreislinie ergeben, woraus anderseits wieder folgt, dass eine Linie zweiter Ordnung oder Klasse stets als Centralprojektion einer Kreislinie aufgefasst werden kann. Die sämtlichen vom Projektionscentrum nach den Punkten der Kreislinie K gezogenen Projektionsstrahlen bilden eine Kegelfläche, welche die Kreislinie K als Leitlinie besitzt, siehe Erkl. 171, und deren Schnitt mit der Ebene E die Centralprojektion der Kreislinie liefert. Diese Centralprojektion nennt man Kegelschnitt. Die Linien zweiter Ordnung oder Klasse sind also Kegelschnitte.

Erkl. 172. Mit Bezug auf die Kegelfläche nennt man die die Kreislinie aus einem Punkt s projizierenden Strahlen auch die Erzeugenden der Kegelfläche und die Kreislinie selbst die Leitlinie der Kegelfläche.

Erkl. 173. Da von einem Punkte in der Ebene eines Kreises höchstens zwei Tangenten an den Kreis gezogen werden können, ferner da eine gerade Linie einen Kreis höchstens in zweien Punkten schneidet, so ist der Kreis gleichfalls eine Linie zweiter Ordnung oder Klasse.

Erkl. 174. Die Kegelfläche, welche einen Kreis als Leitlinie besitzt, heisst eine Kegelfläche zweiter Ordnung oder zweiter Klasse.

Erkl. 175. Da die Centralprojektion einer ebenen Figur stets zu dieser Figur in centrisch-collinearer Beziehung steht, so kann man auch sagen: die centrisch-collineare Figur eines Kreises ist ein Kegelschnitt oder ein Kegelschnitt ist die centrisch-collineare Figur eines Kreises.

Anmerkung 26. Im Vorangegangenen sind nunmehr dreierlei Arten der Erzeugung eines Kegelschnitts vorgeführt worden, nämlich:

1) Erzeugung durch projektive Punktreihen in allgemeiner Lage;
2) Erzeugung durch projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage;
3) Erzeugung durch Centralprojektion bezw. centrisch-collineare Verwandlung des Kreises.

In der II. Hälfte dieses Teils soll auf die ebengenannten Erzeugungsarten der Kegelschnitte näher eingegangen werden.

Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 103. Es sind drei Gerade A, B, C als Träger dreier projektiven Punktreihen in allgemeiner Lage gegeben. Die Punktreihen sind so perspektivisch zu legen, dass sie ein und dasselbe Projektionscentrum besitzen.

Aufgabe 104. Es sind drei projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage gegeben. Dieselben sind so perspektivisch zu legen, dass sie denselben perspektivischen Durchschnitt besitzen und ihre drei Mittelpunkte in einer Geraden liegen.

Aufgabe 105. Zwei projektive Strahlbüschel in allgemeiner Lage sind gegeben. Man soll die entsprechenden parallelen Strahlen derselben konstruieren.

Aufgabe 106. Es sind in einer Ebene n Gerade G_1, G_2, G_3 .... G_n und ebensoviele Punkte p_1, p_2, p_3 .... p_n gegeben. Es ist ein n-Eck zu konstruieren derart, dass seine Seiten der Reihe nach durch die gegebenen Punkte gehen, während seine Ecken der Reihe nach auf den gegebenen Geraden liegen.

Aufgabe 107. In einer Ebene E sei ein leuchtender Punkt p und eine Anzahl reflektierender Geraden G_1, G_2, G_3 .... G_n gegeben. Man soll jenen von p ausgehenden Lichtstrahl konstruieren, der mit seinem von der Geraden G_n reflektierten Lichtstrahle einen Winkel w von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Aufgabe 108. Es sind zwei projektive Strahlbüschel $o(A, B, C \ldots)$ und $o'(A', B', C' \ldots)$ gegeben. Es soll jenes Paar entsprechender Strahlen konstruiert werden, das einen Winkel w von vorgeschriebener Grösse einschliesst.

Aufgabe 109. In einer Ebene sind zwei Gerade G und G_1 und auf jeder ein fester Punkt r bezw. q_1 gegeben. Man soll durch einen weiteren ausserhalb der Geraden G und G_1 gegebenen Punkt p eine Gerade so zeichnen, dass das Produkt der Abstände ihrer Schnittpunkte mit den Geraden G und G_1 von den Punkten r und q_1 eine constante Grösse habe.

Aufgabe 110. Auf zweien gegebenen Geraden G und G_1 als Träger zweier projektiven Punktreihen $a, b, c \ldots$ und $a_1, b_1, c_1 \ldots$ in allgemeiner Lage sollen zwei entsprechende Strecken l und l' von gegebener Länge konstruiert werden.

Aufgabe 111. Zwischen zweien gegebenen Geraden G und G_1 ist eine Strecke so zu konstruieren, dass dieselbe von zweien gegebenen Punkten p und p_1 gesehen, unter gegebenen Winkeln w und w_1 erscheint.

---

5) Andeutungen zu den Lösungen der ungelösten Aufgaben.

Aufgabe 1. Auflösung. Zeichne um p_2 als Mittelpunkt einen Kreis K mit einem Halbmesser gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, das den Abstand des Punktes p als andere Kathete und den Winkel w_2' als den dieser Kathete gegenüberliegenden Winkel besitzt. Eine Parallele durch p' zu $a'b'$ schneidet den Kreis K in zweien Punkten c und d, welche mit p_2 verbunden in p_2c und p_2d die Richtungen der möglichen rechtwinkligen Projektionen der Geraden ab angeben. Den Abstand eines der Punkte a und b kann man nun beliebig wählen und so die Lage von a_2b_2 parallel zu p_2c oder p_2d zeichnen. Die Bestimmung der wahren Länge von $\overline{ab}$ bleibt die nämliche, wie in Antwort der Frage 7.

Es gibt somit zwei verschiedene Richtungen von ab, welche bei der gleichen Neigung w_2' zur **Pr. Eb.** die nämliche schiefe Projektion $a'b'$ besitzen, doch kommen diesen Strecken $\overline{ab}$ verschiedene Längen zu.

Aufgabe 2. Auflösung. Ist $a'b'$ die gegebene schiefe Projektion von ab, so ziehe man durch a' und b' in beliebiger Richtung zwei Parallele $\overline{a'a''}$ und $\overline{b'b''}$ gleich den gegebenen Abständen der Endpunkte der Strecke $\overline{ab}$. Trägt man ferner auf $a'a''$ die Strecke $\overline{a'c}$ gleich dem Abstand des Punktes c von der **Pr. Eb.** ab, so trifft die Parallele cc'' zu $a'b'$ die Verbindungslinie $a''b''$ in einem Punkte c'' so, dass die Parallele durch c'' zur Projektionsrichtung auf $a'b'$ die gesuchte schiefe Projektion des Punktes c liefert.

Aufgabe 3. Auflösung. Die geometrische Lösung der bezüglichen Aufgaben bleibt dieselbe, wie in den zugehörigen Andeutungen angegeben wurde. Die graphische Ausführung geschieht wie in den Aufgaben **1** und **2** bezw. wie in Antwort der Frage **7.**

Aufgabe 12. Es gilt hier die gleiche Bemerkung wie in Aufgabe **3.**

Aufgabe 19. Auflösung. Man lege die Ebene E_3 in die **Pr. Eb.** um und verfahre wie in Aufgabe **16** unter Benützung der Affinitätsbeziehung zwischen schiefer Projektion und Umlegung und mit der Z-Achse als Affinitätsachse.

Aufgabe 20. Auflösung. Man bestimme zunächst die Umlegung a_1 des Punktes a. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt m auf der Z-Achse liegt und die Punkte a und b enthält, liefert auf der Z-Achse zwei Punkte p und q, welche den, die Punkte a_1' und a_1 enthaltenden verlängerten Quadratseiten sowohl für die schiefe Projektion als für die Umlegung angehören.

Aufgabe 20a. Auflösung. Man zeichne durch die Ecken des in Aufgabe 20 konstruierten Quadrates Parallele zur Z-Achse gleich der Länge der Quadratseite.

Aufgabe 21. Man verfahre in gleicher Weise wie in den Aufgaben **17** und **18.**

Aufgabe 22. Auflösung. Man konstruiere die wahren Längen der Seiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ auf eine der in Antwort der Frage **22** angegebenen Arten und zeichne hierauf mit diesen Längen ein Dreieck.

Aufgabe 23. Auflösung. Man zeichne zunächst zwei rechtwinklige Dreiecke mit den gegebenen Entfernungen als Hypotenusen und den Abständen der Punkte a bezw. b als Katheten; die anderen Katheten geben die Entfernungen der ersten Projektionen a_1 und b_1 von dem gesuchten Punkte an. Man braucht also nur die Ebene E_1 umzulegen und um die Umlegungen a_1 und b_1 mit den vorhin genannten Katheten Kreise zu beschreiben, die sich in c_1 schneiden. Aus c_1 bestimmt sich dann die gesuchte schiefe Projektion c_1'.

Aufgabe 24. Auflösung. Man teile jede der Strecken $\overline{a'b'}$ und $\overline{a_1b_1'}$ in dem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$, so geben die Teilungspunkte c' und c_1' bezw. d' und d_1' die schiefen Projektionen der gesuchten Teilungspunkte an.

Aufgabe 25. Auflösung. Durch die Umlegung der Ebene E_1 in die **Pr. Eb.** ergibt sich die rechtwinklige Projektion a_1b_1 der Geraden ab, so wie deren Spur s_1 und deren zweite Projektion s_2 auf der X-Achse. Mittels des Winkels w_2 und des Punktes s lässt sich nun die rechtwinklige Projektion a_2b_2 konstruieren, aus welcher sich mit Zuhilfenahme der schiefen Grundrissprojektion $a_1'b_1'$ auch die schiefe Projektion $a'b'$ bestimmt.

Aufgabe 26. Man führe die bezüglichen Konstruktionen nach den Andeutungen der in Rede stehenden Aufgaben, siehe I. Teil des Projektionszeichnens, in schiefer Projektion aus.

Aufgabe 38—41. Man verfahre in gleicher Weise, wie in den Aufgaben 36—37, in dem man die zweiten Projektionen sämtlicher Punkte mit o_2 verbindet und mittels der aus den ersten Projectionen zu entnehmenden Abständen von der Bildebene und Hinzuziehung des Distanzkreises die centralen Projektionen dieser Punkte bestimmt.

Aufgabe 45. Auflösung. Die gegebene Streke $\overline{ab}$ sei dargestellt durch die centralen und rechtwinkligen Projektionen ihrer Endpunktc a und b. Man ermittele Spur, Flucht und Teilungspunkt der Geraden ab. Ziehe vom Teilungspunkt A_t nach a' und b', welche Linie auf A_2 die Punkte a_2' und b_2' ausschneiden. Teilt man nun die Strecke $\overline{a_2'b_2'}$ in den Punkten c_2' und d_2' in dem gegebenen Verhältnis, so liefern die Verbindungslinien der letztgenannten Teilpunkte mit A_t auf $a'b'$ die Punkte c' und d', welche centralprojektivisch die Strecke $\overline{a'b'}$ in dem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ teilen.

Aufgabe 46. Auflösung. Teilt man, siehe Figur 77, die Seite a_2b_2 in n gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mit o_2, so teilen diese Linien auch die Seite $\overline{c'd'}$ in n-gleiche Teile und sind schon die in der Aufgabe verlangten Parallelen zu den Quadratseiten ad und bd. Teilt man ebenso $\overline{a_2d^0}$ in n-gleiche Teile, und verbindet diese Teilpunkte mit o^0, so schneiden diese Linien auf a_2d' die gesuchten Teilpunkte aus und durch sie gehen geometrisch parallel zu S die übrigen in der Aufgabe verlangten Geraden.

Aufgabe 47. Auflösung. Bestimme die Centralprojektion $\overline{a'b'}$ und trage auf den Linien $a'o_2$ und $b'o_2$ die Länge $\overline{a_2b_2}$ centralprojektivisch nach $\overline{a'c'}$ und $\overline{b'd'}$ ab, so erhält man unmittelbar die centrale Projektion des Quadrates. Die Teilung auf $a'o_2$ kann direkt vorgenommen werden, die Teilung auf $a'c'$ geschieht mittels des Teilungspunktes, analog wie in voriger Aufgabe.

Aufgabe 48. Auflösung a. Zeichne über $\overline{a'b'}$ als Seite ein Quadrat, $a'b'e'f'$, so stellt dasselbe eine der zur Bildebene parallelen Würfelflächen dar. Auf den Verbindungslinien o_2e' und o_2f' liegen die noch fehlenden Würfelecken g' und h'.

Auflösung b. Ziehe durch a' eine Senkrechte $a'd'$ zu $a'b'$ und trage auf den so sich ergebenden Linien $a'b'$, $a'o_2$ und $a'd'$ drei Längen in dem gegebenen Verhältnis centralprojektivisch auf, so sind damit die Endpunkte der drei in a' zusammenstossenden Parallelepipedkanten gegeben, womit auch die centrale Projektion des Parallelepipedes bestimmt ist.

Aufgabe 60. Man bestimme Spur und Flucht der Kreisebene und lege dieselbe mit den drei gegebenen Punkten in die Bildebene um, zeichne durch die drei Punkte den verlangten Kreis und bestimme dessen centrale Projektion als centrisch-collineare Figur des Kreises mit S als Collineationsachse und dem umgelegten Centrum als Collineationscentrum.

Aufgabe 61. Auflösung. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte q' und q'_* der Gegenseitenpaare $a'b'$, $d'c'$ und $b'c'$, $a'd'$ gibt die Flucht Q' der Rechtecksebene, deren Spur S von der Centralprojektion m' des Mittelpunktes des gesuchten Rechtecks $ab\ cd$ ebenso weit entfernt liegt, wie der Punkt m' von Q'. Das umgelegte Projektionscentrum liegt nun einerseits auf einem Kreise über der Strecke $\overline{q'q'_*}$ als Durchmesser, andererseits auf einem zweiten Kreise, welcher über der Strecke $\overline{u'u'_*}$, (u' und u'_* sind die Fluchtpunkte der beiden Rechtecksdiagonalen, also die Schnittpunkte der Viereckspaare $a'c'$ und $b'd'$ mit Q') als Sehne beschrieben ist und einen Peripheriewinkel fasst, gleich dem Winkel der Rechtecksdiagonalen. Die Grösse dieses Winkels erhält man aber unmittelbar mittels Zuhilfenahme eines Rechtecks, dessen Seiten sich wie 1:2 verhalten.

Der Punkt o_2 liegt, da die Ebene des Rechtecks senkrecht zur **Pr. Eb.** steht, auf Q'.

Aufgabe 62. Auflösung. Man lege durch den Punkt eine Ebene senkrecht zur gegebenen Geraden und bestimme ihren Schnittpunkt mit der letzteren, derselbe ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ; lege nun die Kreisebene um ihre Spur um, zeichne den Kreis und bestimme dessen centrisch-collineare Figur bezügl. o^0 als Collineationscentrum.

Aufgabe 63. Auflösung. Man fälle vom Punkte a eine Senkrechte auf die Ebene SQ', so ist deren Fusspunkt der Mittelpunkt m, des der sechsseitigen Grundfläche umbeschriebenen Kreises; da der Halbmesser desselben gleich der Höhe der Pyramide sein soll, so bestimme man die wahre Länge von $\overline{ma}$ und lege hierauf die Grundfläche der Pyramide in die Bildebene um und ermittele die centrale Projektion des Grundflächensechsecks.

Die Ermittelung des Schnittes der gegebenen Ebene mit der Pyramide ist analog wie in Aufgabe 58 durchzuführen.

Aufgabe 64. Auflösung. Man lege durch jede der drei gegebenen Geraden A, B, C eine Ebene parallel zu einer der beiden übrigen Geraden und bestimme den Schnitt mit der dritten Geraden. Auf diese Weise ergeben sich drei Ecken a, b, c des gesuchten Parallelepipedons, womit auch die übrigen Ecken durch Ziehen von Parallelen zu den gegebenen Geraden bestimmt sind.

Aufgabe 65. Auflösung. Man ermittele zunächst den Verschwindungspunkt A_r, in dem man durch die Spur A_s der Geraden A eine Parallele zieht zur Verbindunglinie $A_{q'}\, o_2$; dieselbe schneidet auf A' den Verschwindungspunkt A_r aus. Hierauf fälle man von A_r eine Senkrechte zur Ebene SQ', ermittele deren Fusspunkt und bestimme die wahre Entfernung dieses Fusspunktes von dem Punkte A_r.

Aufgabe 66. Auflösung. Man bestimme die Winkelhalbierebene beider Ebenen und lege durch die gegebene Gerade eine Ebene senkrecht zur letztgenannten Ebene, d. h. man zeichne durch einen beliebig gewählten Punkt der gegebenen Geraden eine Gerade senkrecht zur genannten Winkelhalbierebene, so bestimmt diese Senkrechte mit der gegebenen Geraden die gesuchte Ebene.

Aufgabe 67. Zeichne durch den gegebenen Punkt eine Senkrechte zur gegebenen Ebene und bestimme deren Spur. Durch letztgenannten Punkt geht die Spur der gesuchten Ebene und ist ausserdem Tangente an einen Kreis, welcher die rechtw. Projektion des gegebenen Punktes als Mittelpunkt und einen Halbmesser besitzt gleich der zweiten Kathete eines rechtw. Dreiecks mit dem Abstand des Punktes von der **Pr. Eb.** als der einen Kathete und dem gegebenen Winkel als gegenüberliegenden Winkel.

Aufgabe 68. Auflösung. Ist SQ' die gegebene Ebene, $A_s A_{q'}$ die gegebenen Gerade, so lege man zunächst durch die Gerade $o A_{q'}$ eine Ebene, welche mit der Ebene oQ', den gegebenen Winkel einschliesst; zu diesem Zwecke fällt man durch den Punkt A_q, eine Senkrechte zur Ebene oQ' und zeichnet um deren Fusspunkt als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der genannten Senkrechten als der einen Kathete und dem gegebenen Winkel als gegenüberliegenden Winkel. Die Tangente von o aus an diesen Kreis gibt die Schnittlinie der zur gesuchten Ebene parallelen Ebene mit der Ebene oQ'; sie schneidet die Spur Q' in einem Punkte, welcher der Flucht der gesuchten Ebene angehört.

Aufgabe 69. Auflösung a. Nimmt man die Grösse des Winkels, unter welchem die gesuchte Gerade die beiden gegebenen windschiefen Geraden A und B schneiden soll, etwa $= 60^0$ an und denkt sich durch das Projektionscentrum eine Parallele zur gesuchten Geraden gezogen, welche die **Pr. Eb.** in einem Punkte $U_{q'}$ schneidet, so bilden die drei Geraden $o A_{q'}$, $o B_{q'}$ und $o U_{q'}$ ein Dreikant, von welchem die drei Seitenwinkel gegeben sind. Es ist somit die Richtung der gesuchten Geraden und damit auch deren Fluchtpunkt bestimmt.

Auflösung b. Die Konstruktion bleibt dem Wesen nach die gleiche, wie in Auflösung a, nur hat man in dem Hilfsdreikant statt des Winkels von 60^0, die gegebenen Winkel, etwa α und β einzuführen.

Aufgabe 70. Auflösung. Die rechtwinklige Projektion des Centrums gibt sich als Schnittpunkt der Höhen des gegebenen Fluchtpunktdreiecks $A_{q'}$, $B_{q'}$, $C_{q'}$, desgleichen

die Distanz als Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer der genannten Höhen als Hypotenuse. Ist aber o_2, sowie die Distanz bestimmt, so hat man nur, wenn a' die gegebene Ecke ist, auf den Linien $a' A_{q'}$, $a' B_{q'}$ und $a' C_{q'}$ von a' aus die gegebene Kantenlänge in centraler Projektion mittels der zugehörigen Teilungspunkte abzutragen, wodurch die centrale Projektion des Würfels bestimmt ist.

Aufgabe 71. Auflösung. Die centrale Projektion des Würfels darf nicht beliebig angenommen, sondern muss selbstverständlich so gewählt werden, dass die an einer Ecke zusammenstossenden Vierecke auch thatsächlich die centralen Projektionen von Quadraten darstellen.

Man zeichnet zu diesem Zwecke die drei Fluchtpunkte $A_{q'}$, $B_{q'}$, $C_{q'}$ als Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks, sonst aber ganz beliebig, wählt die Ecke a' gleichfalls beliebig; desgleichen die Länge $\overline{a'c'}$ der centralen Projektion der Kante $\overline{ac}$.

Damit ist zugleich der Fluchtpunkt u' der Diagonale bc auf $B_{q'} C_{q'}$ bestimmt. Mittels eines Halbkreises über $B_{q'} C_{q'}$ als Durchmesser bestimmt sich die Umlegung $B_{q'} o^0 C_{q'}$ des Dreiecks $B_{q'} o C_{q'}$ und dadurch der Fluchtpunkt v' der Diagonale ad und zwar im Schnitt von $B_{q'} C_{q'}$ mit der Senkrechten durch o^0 zu $u' o^0$. Nunmehr sind die übrigen Ecken der centralen Projektion des Würfels bestimmt. Die Aufsuchung der rechtwinkligen Projektion des Würfels geschieht nun dadurch, dass man zunächst die Spur der Quadratebene $abcd$, siehe Auflösung der Aufgabe 27, II. Teil des Projektionszeichnens, ermittelt. Hat man aber diese bestimmt, so ergeben sich die rechtwinkligen Projektionen der Seiten des Quadrates $abcd$ durch Ziehen von Parallelen durch deren Spuren zu den Verbindungslinien $o_2 B_{q'}$ und $o_2 C_{q'}$, sowie den Linien $o_2 a'$, $o_2 b'$, $o_2 c'$, $o_2 d'$ . . . In gleicher Weise findet sich auch die rechtwinklige Projektion der übrigen Quadrate des Würfels.

Aufgabe 72. Man führe die für die betreffenden Aufgaben in den zugehörigen Lösungen bezw. Andeutungen benannten Konstruktionen in centraler Projektion durch.

Aufgabe 78—80. Auflösung. Zeichne die rechtwinkligen Projektionen der in Rede stehenden Körper, verbinde die vertikalen Projektionen der Eckpunkte mit o_2 und trage auf diesen Linien die Abstände der betreffenden Ecken von der Bildebene mit Benützung von $\frac{1}{4} D$, analog wie in Aufgabe 76, ab.

Aufgabe 81. Es ist zur Bestimmung der Lage des Prismas noch beizufügen, dass die Seitenkanten zur Horizontalebene parallel sein sollen. Die Lösung der Aufgabe ist in gleicher Weise durchzuführen, wie die Aufgabe 77.

Aufgabe 82. Es gilt für diese Aufgabe dieselbe Bemerkung wie für die vorhergehende Aufgabe.

Aufgabe 83. Auflösung. Ist SQ' die gegebene Ebene, so wähle man in derselben einen Punkt m' als centrale Projektion des Mittelpunktes der Grundfläche des Cylinders ganz beliebig, verbinde a' mit o_2 und wähle auf $a' o_2$ den Punkt a'_* so, dass $\overline{o_2 a'_*} = \frac{1}{4} \cdot \overline{o_2 a'}$ ist. Desgleichen zeichne man die Linien Q'_* und S'_* parallel zu Q' und S in einem Abstande von o_2 gleich ¼ der Abstände der Linien Q' und S. Konstruiere nun für den Punkt a'_* und für das Centrum o^*, dessen Projektion natürlich mit o_2 zusammenfällt eine Senkrechte zur Ebene und trage auf derselben von a'_* aus ¼ der gegebenen Cylinderhöhe auf, wodurch sich ein Punkt b'_* ergibt. Zeichne ferner die centrale Projektion der kreisförmigen Grundfläche mit dem Mittelpunkt a_* und konstruiere hiezu das centrisch-collineare Bild der oberen Grundfläche des Cylinders, wobei Q'_* als Collineationsachse und $N_{q'_*}$ (Normalenfluchtpunkt für die Ebene $S_* Q'_*$) als

Collineationscentrum dient. Damit ist die centrale Projektion des Cylinders für das Centrum o^* dargestellt. Durch Ziehen von Strahlen durch o_2 nach den Punkten dieses Bildes und Verlängern derselben um $^3/_4$ ihrer Länge, ergibt sich die gesuchte centrale Projektion des Cylinders für das Centrum o.

Aufgabe 84. Der Weg der Lösung bleibt der nämliche wie in Aufgabe 83. Nur erhält man durch das Auftragen der Kegelhöhe auf der Senkrechten durch den Mittelpunkt der Grundfläche die Kegelspitze.

Aufgabe 85. Man bestimme wieder für das Centrum o^* die centrale Projektion a'_*, ebenso Q'_* und S_* ganz so, wie in Aufgabe 83 und führe nun die Zeichnung der centralen Projektion des Würfels aus, indem man von der gegebenen Ecke a_* eine Senkrechte zur Ebene $S_* Q'_*$ fällt und deren Länge bis zum Fusspunkt in $S_* Q'_*$ ermittelt. Letztere gibt die Länge der Würfeldiagonale. Nunmehr kann man die Ebene $S_* Q'_*$ um ihre Spur S_* in die Bildebene umlegen, die rechtwinklige Projektion des Würfels in diese Ebene darstellen und hieraus, da man die Entfernung der Eckpunkte von dieser Ebene gleich $^1/_3$ bezw. $^2/_3$ der Würfeldiagonale kennt, die centrale Projektion der Würfelecken zeichnen, indem man zunächst die centrale Projektion der in der Ebene $S_* Q'_*$ liegenden rechtwinkligen Projektion ermittelt und in den Ecken der betreffenden Entfernungen auf den Senkrechten zur Ebene $S_* Q'_*$ in centraler Projektion abträgt. Hat man auf diese Weise die centrale Projektion des Würfels für das Centrum o^* gezeichnet, so erhält man die centrale Projektion für das Centrum o analog wie in Aufgabe 83.

Aufgabe 86. Mittels der Bedingung, dass die Länge der Seitenkante gleich der dreifachen Länge der Grundkante sein soll, bestimmt sich in Rücksicht auf die bekannte Höhe der Pyramide, die Grösse des Halbmessers des der achtseitigen Grundfläche umbeschriebenen Kreises. Da ausserdem nun die Seitenkante parallel zur **Pr. Eb.** laufen soll, so ist dadurch auch eine Ecke der Grundfläche der Lage nach gegeben. Man konstruiert nun wieder wie in den vorhergehenden Aufgaben für ein Centrum o^* die centrale Projektion der Pyramide und leitet hieraus die centrale Projektion für das Centrum o ab.

Aufgabe 87. Durch die Bedingung, dass die Länge der Seitenkante das Vierfache der Länge der Grundkante betragen soll, ist auch die zweite Grundfläche des Prismas der Lage nach bestimmt. Im Uebrigen verfährt man wie in den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe 88. Die Lösung bleibt die nämliche wie in den Aufgaben 86 und 87, nur ist statt des Achtecks bezw. Sechsecks der Grundfläche je ein Kreis zu wählen.

Aufgabe 103. Auflösung. Legt man zunächst die Geraden A und B mit den Punktreihen a, b, c . . . und a', b', c' . . . perspektivisch, siehe Erkl. 94, so erhält man hiedurch ein Projektionscentrum o'. Dreht man nun die eine der Geraden, etwa A, um ihren Schnittpunkt $a\,a'$ mit der anderen in der Ebene, so bleibt diese Gerade A stets in perspektivischer Lage zur Geraden B. Das Projektionscentrum o beschreibt dabei einen Kreis mit dem Mittelpunkt r und dem Halbmesser $\overline{ro}$. Nun kann man auch die Gerade C mit der Punktreihe a'', b'', c'' . . . mit der Geraden B bezw. mit der Punktreihe a', b', c' . . . perspektivisch legen und erhält hiedurch als Ort für das Projektionscentrum eine zweite Kreislinie. Der Durchschnitt der beiden Kreislinien ist daher das Projektionscentrum, für welche die Punktreihen auf den drei Geraden A, B, C zugleich perspektivisch liegen.

Da sich aber zwei Punktreihen auf unzählig viele Arten perspektivisch legen lassen, so hat auch die vorliegende Aufgabe unzählig viele Lösungen.

Aufgabe 104. Auflösung. Lege zunächst zwei der Strahlbüschel perspektivisch, wodurch sich ein perspektivischer Durchschnitt S ergibt. Nunmehr ist auch das dritte Strahlbüschel bezüglich desselben perspektivischen Durchschnittes zu den beiden ersten Büscheln in perspektivische Lage zu bringen. Die Mittelpunkte der so perspektivisch liegenden Strahlbüschel liegen freilich nicht in einer Geraden, man kann vielmehr durch dieselben eine Kreislinie legen, welche den perspektivischen Durchschnitt in zweien Punkten schneidet, welche Punkte mit den bezüglichen Mittelpunkten verbunden drei unter dem gleichen Winkel zu einander geneigte Strahlenpaare liefern.

Man hat jetzt nur noch nötig, die Büschel so zu legen, dass entsprechende Schenkel der ebengenannten unter dem gleichen Winkel geneigten Strahlenpaare zur Deckung gelangen, so werden die Büschel die in der Aufgabe verlangte Lage einnehmen.

Aufgabe 105. Auflösung. Man verschiebe das eine der Büschel in den Mittelpunkt des anderen Büschels und konstruiere die Doppelstrahlen zu beiden vereinigten Büscheln. Die gesuchten entsprechenden Strahlen sind parallel zu den Doppelstrahlen der Büschel.

Aufgabe 106. Auflösung. Ist A_1 ein beliebiger durch p_1 gehender Strahl, der die Gerade G_1 in e_1 und die Gerade G_n in e_n schneidet, so könnte man A_1 als erste Seite des zu beschreibenden Polygones nehmen; es würde dann die zweite, dritte ... $n-1^{te}$ Seite als $e_1 p_2$, $e_2 p_3$, $e_3 p_4$, $e_{n-1} p_n$ bestimmt sein. Die letzte Seite $p_n e_{n-1}$ trifft aber die Gerade G_n in einem Punkte $e_{n'}$, der im allgemeinen mit dem Punkte e_n nicht zusammenfallen wird. Würde aber $e_{n'}$ mit e_n zusammenfallen, so wäre damit das gesuchte Polygon gezeichnet.

Lässt man nun den Strahl A_1 um p_1 sich drehen, so drehen sich auch die übrigen Seiten um die bezüglichen Punkte p_2 ... und beschreiben dabei projektive Srahlbüschel in perspektivischer Lage mit den perspektivischen Durchschnitten $G_1, G_2 \ldots G_{n-1}$. Hieraus folgt aber auch die Projektivität der von dem Strahle A_1 und dem Strahle $p_n e_{n-1}$ beschriebenen Strahlbüschel. Dieselben liefern daher auf G_n zwei projektive Punktreihen in allgemeiner Lage, deren Doppelpunkte Ecken des gesuchten Polygones sein werden.

Anmerkung 27. Auf Grund der Lösung der vorstehenden Aufgabe ergibt sich folgendes:

Lässt man von den in Aufgabe 106 gegebenen n-Geraden eine, etwa die Gerade G_n weg und zeichnet nun zu jedem Strahle A_1 ein n-Eck so, dass seine Seiten der Reihe nach durch die gegebenen Punkte p_1, p_2 ... p_n gehen, so beschreibt die letzte Ecke e_n eine Linie, welche mit einer Geraden nur zwei Punkte gemein haben kann (die Doppelpunkte der oben angeführten projektiven Punktreihen), d. h. eine Linie zweiter Ordnung oder einen Kegelschnitt.

Liegen die sämtlichen gegebenen Punkte p_1 bis p_n auf einer Geraden G, so befinden sich die von den Strahlen A_1 ... d. h. $p_1 e_1$, $p_2 e_2$, $p_3 e_3$ ... beschriebenen Büschel in perspektivischer Lage zu allen vorhergehenden und nachfolgenden Büscheln, es ist somit auch das Büschel $p_n e_n'$ perspektivisch zum Büschel $p_1 e_1$ oder A_1. Der Schnittpunkt von G mit G_n ist daher eine von vornherein gegebene Ecke eines der möglichen Polygone (es ist dies die Linie G selbst). Man kennt hiernach von den beiden Punktreihen auf G_n einen Doppelpunkt von vornherein und kann den anderen mit Hilfe des Lineals allein bestimmen, siehe Aufgabe 90.

Lässt man nun wieder eine der Geraden etwa die Gerade G_n weg, und verfährt im Uebrigen wie vorhin, so gewinnt man folgenden Satz:

„Hat man ein n-Eck, dessen Seiten der Reihe nach um n auf einer Geraden befindlichen Punkte sich drehen, während die n—1-Ecken desselben auf ebensoviel Geraden fortrücken, so beschreibt auch die letzte n^{te} Ecke eine Gerade."

Wählt man nämlich zu den n—1 Geraden noch eine n^{te} hinzu, so liegt auf dieser Geraden nach dem Vorangegangenen nur eine Ecke des n-Ecks. Endlich kann man auch von den n-Punkten einen etwa den Punkt p_n weglassen, so wird, wenn die n-Ecken eines n-Ecks der Reihe nach auf ebensovielen Geraden fortrücken, während n—1 seiner Ecken durch ebensoviele feste Punkte gehen, die letzte Seite stets die Tangente an eine Linie zweiter Klasse bilden. Denn nimmt man zu den p—1 Punkten $p_1 \ldots p_{n-1}$ noch einen n^{ten} Punkt, nämlich den Punkt p_n hinzu, so gehen durch ihn stets zwei letzte Seiten.

Es kann noch der Fall eintreten, dass die n gegebenen Geraden durch einen festen Punkt hindurch gehen; in diesem Falle sind die entstehenden Punktreihen auf G_1, $G_2 \ldots G_n$ in perspektivischer Lage, es geht daher die Verbindungslinie $e_{n-1}e_n$ d. h. die letzte Polygonseite fortwährend durch einen festen Punkt, nämlich durch das Projektionscentrum der Punktreihen auf G_{n-1} und G_n. „Rücken also die n-Ecken des n-Ecks der Reihe nach auf n durch denselben Punkt gehenden Geraden fort und drehen sich alle Seiten desselben bis auf eine um ebensoviele feste Punkte $p_1 \ldots p_n$, so dreht sich auch die letzte Ecke e_n um einen festen Punkt p_n."

Aufgabe 107. Auflösung. Heisst p_1 der Gegenpunkt von p (der zu p bezüglich G_1 symmetrische Punkt), p_2 der Gegenpunkt von p_1 u. s. w., p_n der Gegenpunkt von p_{n-1}, so erkennt man unmittelbar folgendes: Ein beliebiger von p ausgehender Lichtstrahl treffe die Gerade G_1 in a_1, so wird derselbe nach a_2 auf G_2 so reflektiert, dass a_1a_2 durch p_1 geht. Desgleichen geht der von G_2 reflektierte Strahl durch p_2, und endlich der von G_n reflektierte Strahl durch p_n. Dreht sich nun pa_1 um p, so drehen sich auch die reflektierten Strahlen um p_1, $p_2 \ldots p_n$ und beschreiben perspektivisch liegende Strahlbüschel mit den reflektierenden Geraden G_1 bis G_n als perspektivische Durchschnitte. Es ist somit auch das Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt p_n projektiv zu dem Strahlbüschel $p(a_1 \ldots)$ Zeichnet man nun durch p_n ein zweites Strahlbüschel, dessen Strahlen mit den Strahlen des Büschels $p(a \ldots)$ den gegebenen Winkel w einschliessen, so ist dieses Büschel offenbar auch projektiv zu dem Büschel $p_n(\ldots)$ und die Doppelstrahlen der in $p_n \ldots$ vereinigten Büschel lösen die Aufgabe.

Aufgabe 108. Auflösung. Zeichnet man durch o' ein zweites Strahlbüschel, dessen Strahlen zu den Strahlen des Büschels o (A, B, $C \ldots$) um den Winkel w geneigt sind, so ist dieses Büschel gleichfalls projektiv zu dem Büschel o (A, B, $C \ldots$). Die Doppelstrahlen der im o' vereinigten Büschel lösen demnach die Aufgabe.

Aufgabe 109. Auflösung. Zieht man durch p eine Gerade in beliebiger Richtung, welche die Gerade G in dem Punkte a schneidet, so kann man den Punkt a die ganze Gerade G durchlaufen lassen und zu jedem Punkte a einen Punkt a_1 auf G_1 so konstruieren, dass stets die Beziehung stattfindet: $\overline{ra} \cdot \overline{q_1a_1} = \text{constant}$. Man erhält hiedurch auf G und G_1 zwei projektive Punktreihen, welche in dem Punkte p zu projektiven Strahlbüscheln sich vereinigen lassen, deren Doppelstrahlen die Aufgabe lösen.

Aufgabe 110. Auflösung. Verschiebt man auf G_1 die Strecke l so, dass ihr einer Endpunkt der Reihe nach durch die Punkte a, b, $c \ldots$ geht, so bilden die zweiten Endpunkte eine Punktreihe a', b', $c' \ldots$ In gleicher Weise erhält man auf G_1 durch Verschiebung der Strecke l_1 eine Punktreihe a_1', b_1', c_1'. Nimmt man die Punkte a', b', c' von G als Punkte der Reihe a,b,c und konstruiert ihre entsprechenden Punkte a_1'', b_1'', $c_1'' \ldots$ auf G_1, so erhält man auf letzterer Geraden zwei projektive Punktreihen a_1', b_1', $c_1' \ldots$ und a_1'', b_1'', $c_1'' \ldots$, deren Doppelpunkte die Aufgabe lösen.

Aufgabe 111. Auflösung. Zieht man von p und p_1 nach allen Punkten der Geraden G und G_1, so erhält man zwei projektive Strahlbüschel p (A, B, $C, \ldots$) und p_1 (A_1, B_1, $C_1 \ldots$). Trägt man nun an die Strahlen der beiden Büschel von p bezw. p_1 aus den Winkel w und w_1 stets im gleichen Sinne bezw. an, so bilden die so sich ergebenden zweiten Schenkel dieser Winkel zwei weitere projektive Strahlbüschel, welche die Gerade G_1 in zweien projektiven Punktreihen schneidet. Die Doppelpunkte dieser Punktreihen geben die Endpunkte der gesuchten Strecke auf G_1.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vonderlinn, Jakob

Lehrbuch des Projektionszeichnens für den Schulunterricht und das Selbststudium bearbeitet nach System Kleyer

Bd.: 3,1

[1891]

Math.a. 324 m-3,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650636-6